第41卷第5期 上海师范大学学报(自然科学版) Vol.41, No.5
2012年10月 Journal of Shanghai Normal University(Natural Sciences) Oct., 2012

广义平衡问题和一列非扩张映象不动点问题的强收敛定理

孟繁英,曾六川

(上海师范大学 数理学院,上海 200234)

摘 要: 在Hilbert空间中,利用Fan-KKM定理,证明了广义平衡问题的辅助问题的解的存在性和唯一性.研究了用于寻找广义平衡问题的的解集和一列非扩张映象的不动点集之公共元的迭代序列,在适当条件下证明了该序列强收敛于这两个集合的公共元.

关键词: 非扩张映象;迭代序列;不动点问题

中图分类号: O 177.91 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-5137(2012)05-0441-08

0 引言与预备知识

设 H 是实Hilbert空间,$CB(H)$ 表示 H 的一切有界闭集族,C 是 H 的非空闭凸子集,设 $A: C\to R$ 表示非线性算子,$\varphi: C\to R$ 是实值函数,$\mathrm{R}: C\times C\to R$ 为平衡函数,即对每一个 $v\in C$,$\mathrm{R}(v,v)=0$. 考虑下面的广义混合平衡问题(GMEP):寻找 $v\in C$,使得:

$$\mathrm{R}(v,u)+\varphi(u)-\varphi(v)+\langle A(v),u-v\rangle\geqslant 0,\forall u\in C. \tag{1}$$

记广义混合平衡问题的解为 $(\mathrm{GMEP})_s$. 当 $A\equiv 0$ 时,广义混合平衡问题变为如下的广义平衡问题:寻找 $v\in C$,使得:

$$\mathrm{R}(v,u)+\varphi(u)-\varphi(v)\geqslant 0,\forall u\in C. \tag{2}$$

设 $G: C\to CB(H)$ 是多值函数,$\Psi: H\times C\times C\to R$ 是似平衡函数,即对任意的 $(w,v,u)\in H\times C\times C$ 有 $\Psi(w,v,u)+\Psi(w,u,v)=0$. 考虑如下的广义平衡问题(GEP):寻找 $v\in C$ 和 $r\in G(v)$,使得:

$$\Psi(w,v,u)+\varphi(u)-\varphi(v)\geqslant 0,\forall u\in C. \tag{3}$$

此广义平衡问题的解记为 $(\mathrm{GEP})_s$. 当 $\Psi(w,v,u)\equiv\mathrm{R}(v,u)$ 时,广义平衡问题(3)就是广义平衡问题(2).

$CB(H)$ 上的Hausdorff度量 $\psi(\cdot,\cdot)$ 定义为:

$$\psi(V,U)=\max\{\sup_{v\in V}d(v,U),\sup_{u\in U}d(V,u)\},\forall V,U\in CB(H).$$

2008年,CENG和YAO[1]用KKM技巧讨论了混合平衡问题(2)和有限族非扩张映象不动点问题的迭代序列,并证明了强收敛定理.2009年,TANG和CHANG[2]讨论了广义混合平衡问题(1)和无限族非扩张映象不动点问题的迭代序列,并证明了强收敛定理.2011年,TANG[3]用Fan-KKM技巧讨论了关于广义平衡问题和无限族非扩张映象不动点问题的迭代序列

收稿日期:2012-09-03

基金项目:国家自然科学基金项目(11071169)

作者简介:孟繁英(1987-),女,上海师范大学数理学院硕士研究生;曾六川(1965-),男,上海师范大学数理学院教授.

$$x_{n+1}=\alpha_n f(U_n x_n)+\beta_n x_n+\gamma_n U_n v_n, \tag{4}$$

其中$\{U_n\}$是由(1)定义的非扩张映象列,$f: C\to C$具系数$\alpha\in(0,1)$的压缩映射.

受TANG[3]启发,本文作者构造了一种新的迭代序列:

$$x_{n+1}=\alpha_n f(x_n)+\beta_n x_n+\gamma_n U_n v_n+\delta_n U_n x_n, \tag{5}$$

相应地修改了一些条件,证明了关于广义平衡问题和一列非扩张映象不动点问题的强收敛定理.所得结果改进与发展了TANG[3]的主要结果.

称多值映象$G: C\to CB(H)$为λ-ψ-Lipschitz连续的,如果存在常数$\lambda>0$使得:

$$\psi(G(v),G(u))\leqslant\lambda\|v-u\|,\forall v,u\in C.$$

多值映象$P: D\to 2^H$称为KKM映象,如果对D的任意有限集$u_1,u_2,\cdots,u_n$有:

$$co(\{u_1,u_2,\cdots,u_n\})\subset\bigcup_{i=1}^{n}P(u_i).$$

引理0.1[4] 设D是Hausdorff度量空间E的非空子集,$P: D\to 2^E$是KKM映象.如果对任意的$x\in D$,$P(x)$是闭的;至少存在一点$x\in D$,$P(x)$是紧的,则$\cap_{x\in D}P(x)\neq\varnothing$.

设$F: C\to H$和$\eta: C\times C\to H$是两个映象.称F是:

(i) η-单调的,如果$\langle F(x)-F(y),\eta(x,y)\rangle\geqslant 0,\forall x,y\in C$;

(ii) η-强单调的,如果存在常数$\mu>0$使得:

$$\langle F(x)-F(y),\eta(x,y)\rangle\geqslant\mu\|x-y\|^2,\forall x,y\in C.$$

称$\eta: C\times C\to H$为Lipschitz连续的,若存在常数$\alpha>0$,使:

$$\|\eta(x,y)\|\leqslant\alpha\|x-y\|,\forall x,y\in C.$$

定义在凸集C上的可微函数$Q: C\to R$称为η-强凸的,如果存在常数$\lambda>0$,使得:

$$Q(y)-Q(x)-\langle Q'(x),\eta(y,x)\rangle\geqslant\frac{\lambda}{2}\|x-y\|^2,\forall x,y\in C,$$

其中$Q'(x)$是Q在x的Fréchet导数.称映象$F: C\to R$在点x_0是序列连续的,如果对任意的序列$\{x_n\}$满足$x_n\to x_0$,有$F(x_n)\to F(x_0)$.称F在C上是序列连续的,如果它在C中的每一点都序列连续.

引理0.2[1] 设$Q: C\to R$是具有常数$\lambda>0$的Fréchet可微的η-强凸函数,映象$\eta: C\times C\to H$对任意的$x,y\in C$,满足$\eta(x,y)+\eta(y,x)=0$,则$Q'(x): C\to H$是具常数$\lambda>0$的η-强单调的.

定义0.1[5] 设$\{W_i: C\to C\}$是一列可数无限族非扩张映象,$\{\lambda_i\}$是非负序列且对任意的$i\geqslant 1$,$0\leqslant\lambda_i\leqslant 1$.对任意的$n\geqslant 1$,定义映象$U_n: C\to C$如下:

$$\begin{cases}S_{n,n+1}=I\\ S_{n,n}=\lambda_n W_n S_{n,n+1}+(1-\lambda_n)I,\cdots\cdots\\ S_{n,k}=\lambda_k W_k S_{n,k+1}+(1-\lambda_k)I,\\ S_{n,k-1}=\lambda_{k-1}W_{k-1}S_{n,k}+(1-\lambda_{k-1})I,\cdots\cdots\\ S_{n,2}=\lambda_2 W_2 S_{n,3}+(1-\lambda_2)I\\ U_n=S_{n,1}=\lambda_1 W_1 S_{n,2}+(1-\lambda_1)I\end{cases},$$

称U_n为由$W_n,W_{n-1},\cdots,W_2,W_1$和$\lambda_n,\lambda_{n-1},\cdots,\lambda_2,\lambda_1$生成的映象.

引理0.3[5] 设C是Hilbert空间H的非空闭凸子集,$\{W_i: C\to C\}$是一列可数无限族非扩张映象且$\bigcap_{i=1}^{\infty}F(W_i)\neq\varnothing$,$\{\lambda_i\}$是非负序列,且满足对任意的$i\geqslant 1$,$0<\lambda_i\leqslant b<1$,则

①U_n是非扩张的且对任意的$n\geqslant 1$,$F(U_n)=\cap_{i=1}^{n}F(W_i)$;

②对每一个 $x\in C,k\in N,\lim_{n\to\infty}S_{n,k}x$ 存在；

③由 $Ux:=\lim_{n\to\infty}U_nx=\lim_{n\to\infty}S_{n,1}x,x\in C$ 定义的映象 U 是非扩张的，且 $F(U)=\cap_{i=1}^{\infty}F(W_i)$，称 U 为由 $W_1,W_2,\cdots,W_{n-1},W_n,\cdots$ 和 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-1},\lambda_n,\cdots$ 生成的映象.

④若 $K\subset C$ 有界，则 $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in K}\|Ux-U_nx\|=0$.

引理0.4[2]　如果序列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 是 Banach 空间 E 中的有界子集，存在 $M>0$，使下式成立

$$\|U_{n+1}x_{n+1}-U_nx_n\|\leqslant\|x_{n+1}-x_n\|+2(\prod_{i=1}^{n+1}\lambda_i)M;$$

$$\|U_{n+1}y_{n+1}-U_ny_n\|\leqslant\|y_{n+1}-y_n\|+2(\prod_{i=1}^{n+1}\lambda_i)M.$$

引理0.5[6]　设 $\{x_n\},\{y_n\}$ 是 Banach 空间 E 中的有界子集，$\{\alpha_n\}\subset[0,1]$，满足 $0<\liminf_{n\to\infty}\alpha_n\leqslant\limsup_{n\to\infty}\alpha_n<1$，如果 $x_{n+1}=(1-\alpha_n)y_n+\alpha_nx_n$，且 $\limsup_{n\to\infty}(\|y_{n+1}-y_n\|-\|x_{n+1}-x_n\|)\leqslant0$，那么 $\lim_{n\to\infty}\|y_n-x_n\|=0$.

引理0.6[7]　设非负实数列 $\{\beta_n\}$ 满足 $\beta_{n+1}\leqslant(1-\delta_n)\beta_n+\gamma_n$，其中 $\{\delta_n\}\subset(0,1)$，$\{\gamma_n\}$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n=\infty$，$\limsup_{n\to\infty}(\gamma_n/\delta_n)\leqslant0$，那么 $\lim_{n\to\infty}\beta_n=0$.

1　辅助问题和迭代序列

设似平衡函数 $\Psi:H\times C\times C\to R$ 满足下列条件：

(A_1) 对任意给定的 $u\in C,(w,v)\mapsto\Psi(w,v,u)$ 是 $H\times C\to R$ 的上半连续函数，即对 $(w,v)\in H\times C$，当 $w_n\to w,v_n\to v(n\to\infty)$ 时，有 $\limsup_{n\to\infty}\Psi(w_n,v_n,u)\leqslant\Psi(w,v,u)$；

(A_2) 对任意给定的 $(w,u)\in H\times C,v\mapsto\Psi(w,v,u)$ 是凹函数；

(A_3) 对任意给定的 $(w,v)\in H\times C,u\mapsto\Psi(w,v,u)$ 是凸函数.

考虑如下的广义平衡问题的辅助问题，记为 AP(GEP)：寻找 $v\in C$，使得

$$\Psi(w_x,v,u)+\varphi(u)-\varphi(v)+\frac{1}{s}\langle Q'(v)-Q'(x),\eta(u,v)\rangle\geqslant0,\forall u\in C.\tag{6}$$

其中 $x\in C,w_x\in G(x)$，$s>0$ 是常数.

引理1.1[3]　设 C 是实 Hilbert 空间 H 的非空闭凸有界子集，$G:C\to CB(H)$ 为 λ-ψ-Lipschitz 连续的，$\varphi:C\to R$ 是下半连续的凸函数，$\Psi:H\times C\times C\to R$ 是满足条件 $(A_1)\sim(A_3)$ 的似平衡函数. 设 $s>0$ 是常数. 假定：

(Ⅰ) 映象 $\eta:C\times C\to H$ 是具有常数 $\alpha>0$ 的 Lipschitz 连续的，满足

①$\eta(\cdot,\cdot)$ 对第一变元是仿射的；

②$\eta(x,y)+\eta(y,x)=0,\forall x,y\in C$；

③对每一个固定的 $y\in C,x\mapsto\eta(y,x)$ 是从弱拓扑到弱拓扑的序列连续映象.

(Ⅱ) $Q:C\to R$ 是具常数 $\lambda>0$ 的 η-强凸函数，其导数 Q' 是从弱拓扑到强拓扑的序列连续函数.

对任意 $x\in C$，任取 $w_x\in G(x)$，定义映象 $G_s:C\to C$ 如下：

$$G_s(x)=\{v\in C:\Psi(w_x,v,u)+\varphi(u)-\varphi(v)+\frac{1}{s}\langle Q'(v)-Q'(x),\eta(u,v)\rangle\geqslant0,\forall u\in C\}.\tag{7}$$

则下列结论成立:

①G_s是单值的;

②如果对所有的$(x_1,x_2)\in C\times C$和$w_i\in G(x_i)$,$i=1,2$,

$$\Psi(w_1,G_s(x_1),G_s(x_2))+\Psi(w_2,G_s(x_2),G_s(x_1))\leqslant 0,$$

那么:

(a) $\langle Q'(v)-Q'(u),\eta(G_sv,G_su)\rangle\geqslant\langle Q'(G_sv)-Q'(G_su),\eta(G_sv,G_su)\rangle,\forall(v,u)\in C\times C$;

(b) 如果Q'是具常数$\nu>0$的 Lipschitz 连续的,且$\lambda\geqslant\alpha\nu$,那么$G_s$是非扩张的;

③$F(G_s)=(\mathrm{GEP})_s$;

④$(\mathrm{GEP})_s$是闭凸集.

设C是 Hilbert 空间H的非空闭凸子集,$f:C\to C$具系数$\alpha\in(0,1)$的压缩映射,对任意的$x_1\in C$和$w_1\in G(x_1)$,存在序列$\{w_n\}\subset H$和$\{x_n\},\{v_n\}\subset C$,使得:

$$\begin{cases} w_n\in G(x_n),\ \|w_n-w_{n+1}\|\leqslant\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\psi(G(x_n),G(x_{n+1}))\\ v_n\in C\text{ 满足 }\Psi(w_n,v_n,u)+\varphi(u)-\varphi(v_n)+\dfrac{1}{s_n}\langle Q'(v_n)-Q'(x_n),\eta(u,v_n)\rangle\geqslant 0,\forall u\in C\\ x_{n+1}=\alpha_nf(x_n)+\beta_nx_n+\gamma_nU_nv_n+\delta_nU_nx_n\end{cases},\tag{8}$$

其中$\{\alpha_n\},\{\beta_n\},\{\gamma_n\},\{\delta_n\}\subset(0,1)$且$\alpha_n+\beta_n+\gamma_n+\delta_n=1$,$U_n$是由(1)定义的映象.

引理 1.2[2]　设C是 Hilbert 空间H的非空有界闭凸子集,U_n是由(1)定义的映象,$\{x_n\},\{v_n\}$是由上式定义的序列,其中$\{\alpha_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$,则

$$\lim_{n\to\infty}\|U_nv_n-v_n\|=0,\text{并且}\lim_{n\to\infty}\|x_n-v_n\|=0.$$

2　主要结果

定理 2.1　设C是实 Hilbert 空间H的非空有界闭凸子集,$G:C\to CB(H)$为λ-ψ-Lipschitz 连续的,$\varphi:C\to R$是下半连续的凸函数,$\Psi:H\times C\times C\to R$是满足条件$(A_1)\sim(A_3)$的似平衡函数,$\{W_i:C\to C\}$是一列可数无限族非扩张映象,且$\Phi=\cap_{i=1}^{\infty}F(W_i)\cap(\mathrm{GEP})_s\neq\emptyset$. 令序列$\{\lambda_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=0$,$\{\alpha_n\},\{\beta_n\},\{\gamma_n\},\{\delta_n\}\subset(0,1)$且$\alpha_n+\beta_n+\gamma_n+\delta_n=1$. 假定:

(i) 函数$\eta:C\times C\to H$是具有常数$\alpha>0$的 Lipschitz 连续的,满足:

(a) $\eta(\cdot,\cdot)$对第一变元是仿射的;

(b) $\eta(x,y)+\eta(y,x)=0,\forall x,y\in C$;

(c) 对每一个固定的$y\in C$,$x\mapsto\eta(y,x)$是从弱拓扑到弱拓扑的序列连续函数.

(ii) $Q:C\to R$是具常数$\lambda>0$的η-强凸函数,其导数Q'是从弱拓扑到强拓扑的序列连续函数,且是具常数$\nu>0$的 Lipschitz 连续,且$\lambda\geq\alpha\nu$.

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i)<\infty$,$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n|<\infty$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\beta_{n+1}-\beta_n|<\infty$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\gamma_{n+1}-\gamma_n|<\infty$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\delta_{n+1}-\delta_n|<\infty$,$\liminf\limits_{n\to\infty}s_n>0$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|s_{n+1}-s_n|<\infty$.

如果存在$\theta>0$,使得对任意的$(x_1,x_2)\in C\times C$,$w_i\in G(x_i)$,$i=1,2$,$(s_1,s_2)\in\Gamma\times\Gamma$,其中$\Gamma=\{s_n,n\neq0\}$有:

$$\Psi(w_1,G_{s_1}(x_1),G_{s_2}(x_2))+\Psi(w_2,G_{s_2}(x_2),G_{s_1}(x_1))\leqslant-\theta\|G_{s_1}(x_1)-G_{s_2}(x_2)\|^2. \tag{9}$$

则对 $x^*=P_{\Phi}f(x^*)$,存在 $w^*\in G(x^*)$,使得(x^*,w^*)是广义平衡问题的解且当 $n\to\infty$ 时,有:

$$x_n\to x^*,\quad w_n\to w^*,\quad v_n\to x^*.$$

证明　因为 C 是实 Hilbert 空间 H 的非空有界闭凸子集,所以$\{x_n\}$,$\{v_n\}$有界,又由 f 是压缩映象,U_n是非扩张映象,故$\{f(U_nx_n)\}$,$\{U_nv_n\}$是有界集.

第一步　先证存在 $x^*\in C$,使得 $x_n\to x^*$,$v_n\to x^*$ $(n\to\infty)$. 事实上

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1}-x_n\|=\|\alpha_nf(x_n)+\beta_nx_n+\gamma_nU_nv_n+\delta_nU_nx_n-\alpha_{n-1}f(x_{n-1})-\\
&\beta_{n-1}x_{n-1}-\gamma_{n-1}U_{n-1}v_{n-1}-\delta_{n-1}U_{n-1}x_{n-1}\|=\\
&\|\alpha_nf(x_n)-\alpha_nf(x_{n-1})+\alpha_nf(x_{n-1})-\alpha_{n-1}f(x_{n-1})+\beta_nx_n-\beta_nx_{n-1}+\\
&\beta_nx_{n-1}-\beta_{n-1}x_{n-1}+\gamma_nU_nv_n-\gamma_nU_{n-1}v_{n-1}+\gamma_nU_{n-1}v_{n-1}-\gamma_{n-1}U_{n-1}v_{n-1}+\\
&\delta_nU_nx_n-\delta_nU_{n-1}x_{n-1}+\delta_nU_{n-1}x_{n-1}-\delta_{n-1}U_{n-1}x_{n-1}\|\leqslant\\
&\alpha\alpha_n\|x_n-x_{n-1}\|+|\alpha_n-\alpha_{n-1}|\ \|f(x_{n-1})\|+\beta_n\|x_n-x_{n-1}\|+\\
&|\beta_n-\beta_{n-1}|\ \|x_{n-1}\|+\gamma_n\|U_nv_n-U_{n-1}v_{n-1}\|+|\gamma_n-\gamma_{n-1}|\ \|U_{n-1}v_{n-1}\|+\\
&\delta_n\|U_nx_n-U_{n-1}x_{n-1}\|+|\delta_n-\delta_{n-1}|\ \|U_{n-1}x_{n-1}\|\leqslant\\
&(\alpha_n\alpha+\beta_n+\delta_n)\|x_n-x_{n-1}\|+\gamma_n\|v_n-v_{n-1}\|+2(\gamma_n+\delta_n)M\prod_{i=1}^{n}\lambda_i+\\
&(|\alpha_n-\alpha_{n-1}|+|\beta_n-\beta_{n-1}|+|\gamma_n-\gamma_{n-1}|+|\delta_n-\delta_{n-1}|)_{\Lambda},
\end{aligned}\tag{10}$$

其中 $\Lambda=\sup\{\|f(x_n)\|+\|x_n\|+\|U_nv_n\|+\|U_nx_n\|:n\geqslant1\}$. 另一方面,对 $\forall u\in C$ 有:

$$\Psi(w_n,v_n,u)+\varphi(u)-\varphi(v_n)+\frac{1}{s_n}\langle Q'(v_n)-Q'(x_n),\eta(u,v_n)\rangle\geqslant0, \tag{11}$$

$$\Psi(w_{n+1},v_{n+1},u)+\varphi(u)-\varphi(v_{n+1})+\frac{1}{s_{n+1}}\langle Q'(v_{n+1})-Q'(x_{n+1}),\eta(u,v_{n+1})\rangle\geqslant0, \tag{12}$$

其中 $v_n=G_{s_n}x_n$,$v_{n+1}=G_{s_{n+1}}x_{n+1}$,在(11)式中令 $u=v_{n+1}$,在(12)式中令 $u=v_n$,得到:

$$\Psi(w_n,v_n,v_{n+1})+\varphi(v_{n+1})-\varphi(v_n)+\frac{1}{s_n}\langle Q'(v_n)-Q'(x_n),\eta(v_{n+1},v_n)\rangle\geqslant0,\forall u\in C,$$

$$\Psi(w_{n+1},v_{n+1},v_n)+\varphi(v_n)-\varphi(v_{n+1})+\frac{1}{s_{n+1}}\langle Q'(v_{n+1})-Q'(x_{n+1}),\eta(v_n,v_{n+1})\rangle\geqslant0,\forall u\in C,$$

两式相加得到,并由(9)式,得:

$$\begin{aligned}
&-s_n\theta\|v_n-v_{n+1}\|^2+\langle Q'(v_n)-Q'(v_{n+1})-Q'(v_{n+1})-Q'(x_n)-\\
&\frac{s_n}{s_{n+1}}(Q'(v_{n+1})-Q'(x_{n+1})),\eta(v_{n+1},v_n)\rangle\geqslant0.
\end{aligned}$$

不失一般性,设存在实数 d,使得对任意的 $n\geqslant1$,有 $s_n>d$,从而由命题 1.1 有:

$$\begin{aligned}
&\lambda\|v_n-v_{n+1}\|^2\leqslant-s_n\theta\|v_n-v_{n+1}\|^2+\langle Q'(v_{n+1})-Q'(x_{n+1})+Q'(x_{n+1})-\\
&Q'(x_n)-\frac{s_n}{s_{n+1}}(Q'(v_{n+1})-Q'(x_{n+1})),\eta(v_{n+1},v_n)\rangle,
\end{aligned}$$

即

$$\lambda\|v_{n+1}-v_n\|\leqslant-s_n\theta\|v_{n+1}-v_n\|+\mu\|Q'(x_{n+1})-Q'(x_n)\|+$$

$$\alpha\left|1-\frac{s_n}{s_{n+1}}\right|\|Q(v_{n+1})-Q(x_{n+1})\|\leqslant -d\theta\|v_{n+1}-v_n\|+\alpha\nu\|x_{n+1}-x_n\|+\frac{\alpha\nu}{d}|s_{n+1}-s_n|K,\tag{13}$$

其中 $K=\sup\{\|v_n-x_n\|:n\geqslant 1\}$,于是

$$\|v_{n+1}-v_n\|\leqslant\frac{\alpha\nu}{\lambda+d\theta}\|x_{n+1}-x_n\|+\frac{K}{d}|s_{n+1}-s_n|.\tag{14}$$

由(10)式有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x_n\|&\leqslant(\alpha_n\alpha+\beta_n+\delta_n)\|x_n-x_{n-1}\|+\gamma_n\frac{\alpha\nu}{\lambda+d\theta}\|x_n-x_{n-1}\|+\gamma_n\frac{K}{d}|s_n-s_{n-1}|+\\&2(\gamma_n+\delta_n)M\prod_{i=1}^{n}\lambda_i+(|\alpha_n-\alpha_{n-1}|+|\beta_n-\beta_{n-1}|+|\gamma_n-\gamma_{n-1}|+|\delta_n-\delta_{n-1}|)\leqslant\\&L\|x_n-x_{n-1}\|+\frac{K}{d}|s_n-s_{n-1}|+2M\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\\&+(|\alpha_n-\alpha_{n-1}|+|\beta_n-\beta_{n-1}|+|\gamma_n-\gamma_{n-1}|+|\delta_n-\delta_{n-1}|)_{\Lambda},\end{aligned}\tag{15}$$

其中 $L=\max\limits_{n\geqslant 1}\{1-(1-\alpha)\alpha_n\}$(注:$\beta_n+\delta_n+\gamma_n\frac{\alpha\nu}{\lambda+d\theta}<\beta_n+\delta_n+\gamma_n=1-\alpha_n$).记:

$$\kappa_n=\frac{K}{d}|s_n-s_{n-1}|+2M\prod_{i=1}^{n}\lambda_i+(|\alpha_n-\alpha_{n-1}|+|\beta_n-\beta_{n-1}|+|\gamma_n-\gamma_{n-1}|+|\delta_n-\delta_{n-1}|)_{\Lambda},$$

由引理(0.6)可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0$,从而对任意的 $\varepsilon>0$,存在正整数 $N_0\geqslant 1$,使得当 $m>n\geqslant N_0$ 时,有 $\|x_n-x_{n-1}\|<\varepsilon$,$\sum_{i=n}^{m-1}\kappa_i<\varepsilon$,于是由(15)式得:

$$\begin{aligned}&\|x_m-x_n\|\leqslant\sum_{i=n}^{m-1}\|x_{i+1}-x_i\|\leqslant L\sum_{i=n}^{m-1}\|x_i-x_{i-1}\|+\sum_{i=n}^{m-1}\kappa_i=\\&L\left(\sum_{i=n}^{m-1}\|x_{i+1}-x_i\|+\|x_n-x_{n-1}\|-\|x_m-x_{m-1}\|\right)+\sum_{i=n}^{m-1}\kappa_i,\\&\sum_{n}^{m-1}\|x_{i+1}-x_i\|\leqslant\frac{L}{1-L}(\|x_n-x_{n-1}\|-\|x_m-x_{m-1}\|)+\frac{1}{1-L}\sum_{i=n}^{m-1}\kappa_i,\\&\|x_m-x_n\|\leqslant\frac{L}{1-L}\|x_n-x_{n-1}\|+\frac{1}{1-L}\sum_{i=n}^{m-1}\kappa_i\leqslant\frac{1+L}{1-L}\varepsilon.\end{aligned}$$

可得 $\{x_n\}$ 是 C 中的 Cauchy 序列,不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$ 则根据前面证明可得:

$$\|v_m-v_n\|\leqslant\frac{\alpha\nu}{\lambda+d\theta}\times\frac{1+L}{1-L}\varepsilon+\varepsilon,m>n\geqslant N_0.$$

可得 $\{v_n\}$ 是 C 中的 Cauchy 序列,由引理(1.1)的结论可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-v_n\|=0$,所以

$$\|v_n-x^*\|\leqslant v_n-x_n\|+\|x_n-x^*\|\to 0,(n\to\infty).$$

从而证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=x^*$.

第二步 因为 $G:C\to CB(H)$ 具有常数 λ_1 的 ψ-Lipschitz 连续的多值映象,得:

$$\|w_n-w_{n+1}\|\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)\psi(G(x_n),G(x_{n+1}))\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)\lambda_1\|x_n-x_{n+1}\|.\tag{16}$$

由(16)的结论可知，对任意的正整数 m,n，$\exists N_0$，使得当 $m>n\geqslant N_0$ 时，有：

$$\|w_m-w_n\|\leqslant\sum_{i=n}^{m-1}\|w_{i+1}-w_i\|\leqslant\sum_{i=n}^{m-1}\lambda_1\left(1+\frac{1}{i}\right)\|x_{i+1}-x_i\|\leqslant 2\lambda_1\frac{1+L}{1-L}\varepsilon.$$

故 $\{w_n\}$ 是 H 中的 Cauchy 序列，则 $\exists w^*\in H$ 使得 $w_n\to w^*(n\to\infty)$. 另一方面，因为

$$w_n\in G(x_n),\mathrm{d}(\mathrm{w_n},\mathrm{G}(\mathrm{x}^*))\leqslant max\{\mathrm{d}(\mathrm{w_n},\mathrm{G}(\mathrm{x}^*)),$$
$$\sup_{\mathrm{w}\in\mathrm{G}(\mathrm{x}^*)}\mathrm{d}(\mathrm{G}(\mathrm{x_n}),\mathrm{w})\}\leqslant\psi(\mathrm{G}(\mathrm{x_n}),\mathrm{G}(\mathrm{x}^*)),$$

所以

$$d(w^*,G(x^*))\leqslant\|w^*-w_n\|+\psi(G(x_n),G(x^*))\leqslant$$
$$\|w^*-w_n\|+\lambda_1\|x_n-x^*\|\to 0(n\to\infty).$$

这表明了 $\mathrm{d}(\mathrm{w}^*,\mathrm{G}(\mathrm{x}^*))=0$，又因为 $\mathrm{G}(\mathrm{x}^*)\in\mathrm{CB}(\mathrm{H})$，所以 $\mathrm{w}^*\in\mathrm{G}(\mathrm{x}^*)$.

综上所述，证明了 $\exists\mathrm{w}^*\in\mathrm{G}(\mathrm{x}^*)$，使得 $\mathrm{w_n}\to\mathrm{w}^*(\mathrm{n}\to\infty)$.

第三步　根据 $\mathrm{v_n}=\mathrm{G}_{\mathrm{s_n}}(\mathrm{x_n})$ 及(8)式，由条件(i)(ii)，($\mathrm{A_1}$)及 A 的下半连续性，得

$$\Psi(w^*,x^*,u)+\varphi(u)-\varphi(x^*)\geq 0,\forall u\in C,$$

这表明 $\mathrm{x}^*\in(\mathrm{GEP})_{\mathrm{s}}$，另一方面，假设 $\mathrm{x}^*\notin\mathrm{F}(\mathrm{U})$，则由 *Opials* 条件得：

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n-x^*\|<\lim_{n\to\infty}\|v_n-Ux^*\|\leqslant\lim_{n\to\infty}(\|v_n-Uv_n\|+\|v_n-x^*\|).$$

根据引理(0.3)和引理(1.1)有：

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n-Uv_n\|\leqslant\lim_{n\to\infty}\|v_n-U_nv_n\|+\limsup_{n\to\infty}\|U_nv_n-Uv_n\|=0.$$

故 $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\|\mathrm{v_n}-\mathrm{x}^*\|<\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\|\mathrm{v_n}-\mathrm{x}^*\|$，矛盾，所以 $\mathrm{x}^*\in\mathrm{F}(\mathrm{U})$. 综上证明可得 $\mathrm{x}^*\in\Phi$.

第四步　证明 $\mathrm{x}^*=\mathrm{t}=\mathrm{P}_{\Phi}\mathrm{f}(\mathrm{t})$. 事实上由第三步的证明有：

$$\lim_{n\to\infty}\langle f(t)-t,x_n-t\rangle=\langle f(t)-t,x^*-t\rangle\leqslant 0. \tag{17}$$

于是

$$\|x_{n+1}-t\|^2=\|\alpha_n(f(x_n)-t)+\beta_n(x_n-t)+\gamma_n(U_nv_n-t)+\delta_n(U_nx_n-t)\|^2\leqslant$$
$$\|\beta_n(x_n-t)+\gamma_n(U_nv_n-t)+\delta_n(U_nx_n-t)\|^2+2\alpha_n\langle f(x_n)-t,x_{n+1}-t\rangle\leqslant$$
$$(\beta_n\|x_n-t\|+\gamma_n\|U_nv_n-t\|+\delta_n\|U_nx_n-t\|)^2+$$
$$2\alpha\alpha_n\|x_{n+1}-t\|\|x_n-t\|+2\alpha_n\langle f(t)-t,x_{n+1}-t\rangle\leqslant$$
$$(1-\alpha_n)^2\|x_n-t\|^2+\alpha\alpha_n(\|x_{n+1}-t\|^2+\|x_n-t\|^2)+2\alpha_n\langle f(t)-t,x_{n+1}-t\rangle.$$

移项整理得：

$$\|x_{n+1}-t\|^2\leqslant\frac{(1-\alpha_n)^2+\alpha\alpha_n}{1-\alpha\alpha_n}\|x_n-t\|^2+\frac{2\alpha_n}{1-\alpha\alpha_n}\langle f(t)-t,x_{n+1}-t\rangle\leqslant$$
$$\left[1-\frac{(1-\alpha)\alpha_n}{1-\alpha_n}\right]\|x_n-t\|^2+\frac{2\alpha_n}{1-\alpha_n}\left[\frac{\alpha_n}{2}\|x_n-t\|^2+\langle f(t)-t,x_{n+1}-t\rangle\right],$$

其中

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\alpha)\alpha_n}{1-\alpha_n}=\infty,\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\alpha_n}{2}\|x_n-t\|^2+\langle f(t)-t,x_{n+1}-t\rangle\right]=0.$$

由引理(0.6)得 $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\|\mathrm{x_n}-\mathrm{t}\|=0$. 由极限的唯一性得 $\mathrm{t}=\mathrm{x}^*$. 定理证完.

参考文献:

[1] CENG L C,YAO J C. A hybrid iterative scheme for fixed equilibrium problems and fixed point problems [J]. J Comput Math Appl,2008,214:186 - 201.

[2] TANG J F,CHANG S S. Strong convergence theorem for a generalized mixed equilibrium problem and fixed point problm for a family of infinitely nonexpansive mapping in Hilbert space [J]. PanAmerican Mathematical Journal Volume,2009,19:75 - 86.

[3] TANG J F. Strong convergence theorem for a generalized equilibrium problem and fixed point problem for an Infinite family of nonexpansive mappings in a Hilbert space [J]. Math App,2011,24(2):265 - 273.

[4] FAN K. A generalization of Tychonoffs fixed - point thorem [J]. Math Ann,1961,142:305 - 310.

[5] CHANG S S,JOSEPH LEE H W,CHI K C. A new method for solving equilibrium problems fixed point problem and variational inequality problem with application to optimization [J]. Nonlinear Analysis,2009,70:3307 - 3319.

[6] SUZUI T. Strong convergence of Krasnoselsii and Manns type sequences for one - parameter nonexpansive semigroups without Bochner integrals [J]. J Math Anal,2005,305:227 - 239.

[7] XU H K. Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings [J]. J Math Appl,2004,298:279 - 291.

[8] CENG L C,ANSARI Q H,YAO J C. Viscosity approximation methods for generalized equilibrium problems and fixed point problems [J]. J Glob Optim,2009,43:487 - 502.

[9] TAKAHASHI S,TAKAHASHI W. Viscosity approximation method for equilibrium problems and fixed point problems in Hilbert space [J]. J Math Appl,2007,331:506 - 515.

Strong convergence theorem for a generalized equilibrium problem and the fixed point problem of an infinite family nonexpansive mappings

MENG Fan-ying, ZENG Lu-chuan

(College of Mathematics and Sciences,Shanghai Normal University,Shanghai 200234,China)

Abstract: Using Fan-KKM Theorem, we prove the existence and uniqueness of the solution of the auxiliary problem for a generalized equilibrium problem. A common element of the solution set of the generalized equilibrium problem and the fixed point set for an infinite family of nonexpansive mappings can be achieved by an iterative sequence.

Key words: nonexpansive mapping; iterative sequence; fixed point problem

(责任编辑:冯珍珍)