第41卷第5期　　上海师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 41,No. 5
2012年10月　　Journal of Shanghai Normal University(Natural Sciences)　　Oct.,2012

随机违约强度下可展期公司债券的定价

任学敏，施林嵩

(同济大学 数学系,上海 200092)

摘　要: 将公司债券发生违约事件与市场利率的变化联系起来,对可展期的公司债券进行定价.用约化模型处理企业违约风险,在随机利率下,用偏微分方程的方法给出了可展期的企业债券定价的公式,并讨论了它与普通企业债券在收益率上的差异.

关键词: 可展期的企业债券; 信用风险; 约化方法

中图分类号: F 830.9; O 29　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1000-5137(2012)05-0449-05

0　引　言

随着金融市场的发展和完善,公司在融资过程中越来越多的发行企业债券.不同于政府债券,企业债券一般被认为是具有信用风险的,因此在对企业债券进行定价时,不仅需要考虑利率风险的影响,也要对其中的信用风险进行度量.目前度量信用风险的方法主要有两种:结构化方法(structural approach)和约化方法(reduced form approach).结构化方法由 Merton(1974)等人[1]提出,把企业债券看成是以公司债务额为敲定价的欧式看跌期权.但是在实证中发现,Merton 模型得到的违约概率偏低,Black 和 Cox 等人[2]提出了首次通过模型(first passage model),同时也解决了 Merton 模型中企业债券只能在到期日时才能违约的缺陷.Longstaff 和 Schwartz[3]及 Zhou(2001)[4]对首次通过模型进行了推广,分别考虑了随机利率模型和跳扩散模型,解决了连续模型在债券快到期时的违约概率几乎为零的问题.结构化方法的优点是把公司的违约可能性与公司的经济状况即公司资产和债务挂钩,并有成熟的期权定价理论作为基础;但其缺点也是明显的,例如,普通投资者通常很难了解公司资产情况,即便是上市公司也只是每季度公布一次,而其真实性也存疑(如安然事件).因此,结构化方法通常适合公司的经理人使用.而约化方法由 Jarrow[5],Duffie[6]等提出,直接对违约时间给出模型,把违约看成是完全不可预料的.约化方法避免了直接对公司资产这一不易观测的数据进行建模,从而更具有操作性.Jarrow 将违约强度过程看作有限状态的马尔可夫过程,通过信用等级转移矩阵确定违约强度;Duffie 提出的简约模型引入了带有违约强度过程调整的短期利率,将有违约风险的债券期限结构看作无违约的债券进行定价.

可展期公司债券是在公司债券的基础上增加了一个延期支付的权利,该公司债券的发行者可以在原先约定的到期日时根据市场利率水平决定是否要展期.一般情况下,若市场利率高于该债券收益率,则发行者会考虑将该公司债券展期;若市场利率低于该债券收益率,则发行者不展期,即在原定的到期日支付该公司债券持有者本金(有息票的情况下还应支付息票),因为此时该发行者可以重新发行新的债券达到融资目的,并且此时发行的债券成本较低,即使该发行者没有融资的需求,也可以通过利率衍生品获得收益.对于可展期债券的持有者而言,不仅面临着利率随时间波动的风险,还将面临该公司债券在展期内可能发生违约的风险.Ren & Liu(2010)[7]给出了当违约强度为常数时的可展期债券的定

收稿日期: 2012-09-10

基金项目: 国家社会科学基金项目(12BJY011)

作者简介: 任学敏(1962-),男,同济大学数学系副教授; 施林嵩(1988-),男,同济大学数学系硕士研究生.

价,但实际操作中公司的违约强度一般来说都不会是固定不变的,通常会与利率相关,因此,本文作者假设违约强度为市场利率的一次函数形式,得到可展期债券的定价.

1 模型假设

(1) 考虑对象是一份零息票的公司债券,面值为 1 元;

(2) 到期日为 T,可展期限为 T_1,即发行者若在 T 时刻想要实施展期的权利,可以将该债券展期至 T_1 时刻;

(3) 若公司债券在到期前发生违约,则采用市值回收,回收率为 ε,$0\leqslant\varepsilon\leqslant1$;

(4) 市场利率满足具有均值回归性质的 Vasicek[8] 模型,即: $\mathrm{d}r_t=\alpha(\theta-r_t)\mathrm{d}t+\sigma_r\mathrm{d}W_t$;

(5) 考虑违约强度为市场利率的线性函数,即: $\lambda_t=ar_t+b$(a,b 为正常数).

这是因为,违约强度通常与市场利率呈正相关的关系;并且即使市场利率为零,公司债券同样存在着违约的可能性.

2 普通公司债券的定价

普通的零息票公司债券是发行者在到期日支付 1 元面值的一份债券,它可能在到期日之前发生违约,因此该债券的价格 $P(0,T)$ 为:

$$E\left[\mathrm{e}^{-\int_0^T r_s\mathrm{d}s}1_{\{\tau>T\}}+\mathrm{e}^{-\int_0^\tau r_s\mathrm{d}s}P(\tau_-,T)\varepsilon 1_{\{\tau\leqslant T\}}\right]=E\left[\mathrm{e}^{-\int_0^T r_s+(1-\varepsilon)\lambda_s\mathrm{d}s}\right].\tag{1}$$

其中 $E(\cdot)$ 为数学期望,τ 表示违约时间,$1_{\{\cdot\}}$ 为示性函数.

根据 Feynman-Kac[9] 公式得到该债券的价格满足如下方程:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma_r^2\dfrac{\partial^2 P}{\partial r^2}+\dfrac{\partial P}{\partial r}\alpha(\theta-r)-\{[1+a(1-\varepsilon)]r+b(1-\varepsilon)\}P=0\\ P(r,T)=1\end{cases}.\tag{2}$$

该方程有仿射结构解[10] $P(r,t;T)=\mathrm{e}^{A(t;T)-rB(t;T)}$,其中:

$$B(t;T)=\frac{1+a(1-\varepsilon)}{\alpha}\left[1-\mathrm{e}^{-\alpha(T-t)}\right],\tag{3}$$

$$A(t;T)=\frac{1}{\alpha^2}\left[B(t)-(1+a(1-\varepsilon))(T-t)\right]\left[\alpha^2\theta-\frac{\sigma_r^2(1+a(1-\varepsilon))}{2}\right]-\frac{\sigma_r^2}{4\alpha}B^2(t)-b(1-\varepsilon)(T-t).\tag{4}$$

3 可展期公司债券的定价

3.1 定价公式

根据上述定价公式,公司在 T 时刻发行的在 T_1 时刻到期的零息票公司债券的价格为:

$$P(r,T;T_1)=\mathrm{e}^{A(T;T_1)-rB(T;T_1)}.\tag{5}$$

其收益率为:

$$R_{T,T_1}=-\frac{A(T;T_1)-r_TB(T;T_1)}{T_1-T}.\tag{6}$$

假定可展期债券的名义收益率为 R(即到期不展期时的收益率),则到期日为 T 的可展期债券在 t 时刻的价格 $\tilde{P}(r,t;T)$ 满足下面的方程:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \tilde{P}}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma_r^2\dfrac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial r^2}+\dfrac{\partial \tilde{P}}{\partial r}\alpha(\theta-r)-\{[1+a(1-\varepsilon)]r+b(1-\varepsilon)\}\tilde{P}=0\\ \tilde{P}(r,T)=I_{\{R_{T,T_1}\leqslant R\}}+I_{\{R_{T,T_1}>R\}}\mathrm{e}^{-(R_{T,T_1}-R)(T_1-T)}\end{cases}.\tag{7}$$

该方程的终值条件表示：若在 T 时刻重新融资的成本低于原来的成本，则发行者不实施展期的权利；否则，发行者将该公司债券展期至 T_1 时刻，此时该债券的价值将由名义收益率 R 增长至 T_1 时刻，但由于市场收益率为 R_{T,T_1}，故此时该债券的价值为 $\mathrm{e}^{-(R_{T,T_1}-R)(T_1-T)}$，且有如下等价关系：

$$R_{T,T_1} \leqslant R \Leftrightarrow r_T \leqslant \frac{A(T;T_1)+R(T_1-T)}{B(T;T_1)}. \tag{8}$$

令 $\tau = T-t$，则方程转化为：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \tilde{P}}{\partial \tau}-\dfrac{1}{2}\sigma_r^2\dfrac{\partial^2\tilde{P}}{\partial r^2}-\dfrac{\partial \tilde{P}}{\partial r}\alpha(\theta-r)+\{[1+a(1-\varepsilon)]r+b(1-\varepsilon)\}\tilde{P}=0\\ \tilde{P}(r,0)=\varphi(r)\end{cases}, \tag{9}$$

其中，$\varphi(r)=I_{\{r\leqslant\frac{A(T;T_1)+R(T_1-T)}{B(T;T_1)}\}}+I_{\{r>\frac{A(T;T_1)+R(T_1-T)}{B(T;T_1)}\}}\mathrm{e}^{A(T;T_1)-rB(T;T_1)+R(T_1-T)}$.

设 $G(\tau,r;\xi)$ 为上述方程的基本解，则 $\tilde{P}(r,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(\tau,r;\xi)\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$，其中 $G(\tau,r;\xi)$ 满足方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial G}{\partial \tau}-\dfrac{1}{2}\sigma_r^2\dfrac{\partial^2 G}{\partial r^2}-\dfrac{\partial G}{\partial r}\alpha(\theta-r)+\{[1+a(1-\varepsilon)]r+b(1-\varepsilon)\}G=0\\ G(r,0;\xi)=\delta(r-\xi)\end{cases}, \tag{10}$$

这里 $\delta(\cdot)$ 为 δ 函数.

该方程有解[10]：

$$G(r,\tau;\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}}\mathrm{e}^{-\frac{(r\mathrm{e}^{-\alpha\tau}-\gamma(\tau)-\xi)^2}{2\eta}-\beta(\tau)-M(\tau)}. \tag{11}$$

则原方程(9)的解为：

$$\tilde{P}(r,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(\tau,r;\xi)\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\mathrm{e}^{-\beta(T-t)-M(T-t)}[N(d_1(r,t;R))+$$
$$\mathrm{e}^{A(T;T_1)+R(T_1-T)+\frac{\eta(t)B^2(T;T_1)}{2}-B(T;T_1)(r\mathrm{e}^{-\alpha(T-t)}-\gamma(T-t))}N(d_2(r,t;R))]. \tag{12}$$

其中 $\beta(t)=\dfrac{1+a(1-\varepsilon)}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha t})$，$M(t)=-\int_0^t c(s)\,\mathrm{d}s$，$\gamma(t)=\int_0^t \hat{a}(s)\,\mathrm{d}s$，

$\hat{a}(t)=(\sigma_r^2\beta(t)-\alpha\theta)\mathrm{e}^{-\alpha t}$，$c(t)=\dfrac{1}{2}\sigma_r^2\beta^2(t)-\alpha\theta\beta(t)-b(1-\varepsilon)$，

$d_1(r,t;R)=\dfrac{\tilde{r}(T)-r\mathrm{e}^{-\alpha(T-t)}+\gamma(T-t)}{\sqrt{\eta(t)}}$，$d_2(r,t;R)=-d_1(r,t;R)-\dfrac{\eta(t)B(T;T_1)}{\sqrt{\eta(t)}}$，

$\tilde{r}(T)=\dfrac{A(T;T_1)+R(T_1-T)}{B(T_1;T)}$，$\eta(t)=\dfrac{\sigma_r^2}{2\alpha}(1-\mathrm{e}^{-2\alpha(T-t)})$.

3.2　名义收益率 R 的单调性

任取 $0\leqslant R_1<R_2$，则 $h(r,t)=\tilde{P}(r,t;R_2)-\tilde{P}(r,t;R_1)$ 满足：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial h}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma_r^2\dfrac{\partial^2 h}{\partial r^2}+\dfrac{\partial h}{\partial r}\alpha(\theta-r)-\{[1+a(1-\varepsilon)]r+b(1-\varepsilon)\}h=0\\ h(r,T)=I_{(R_1<R_{T,T_1}<R_2)}\times(1-\mathrm{e}^{-(R_{T,T_1}-R_1)(T_1-T)})+I_{\{R_{T,T_1}\leqslant R_1\}}\times 0+\\ \quad I_{\{R_{T,T_1}>R_2\}}\times(\mathrm{e}^{-(R_{T,T_1}-R_2)(T_1-T)}-\mathrm{e}^{-(R_{T,T_1}-R_1)(T_1-T)})\end{cases}.$$

根据极值原理，因为边界条件 $h(r,T)\geqslant 0$，所以 $h(r,t)\geqslant 0$，因此 $\tilde{P}(r,t;R)$ 关于 R 单调递增.

3.3　名义收益率 R 的数值解

由 R 满足等式 $\mathrm{e}^{RT}\tilde{P}(0,r)=1$，可得 R 为下面的超越方程的解：

$$R = -\frac{\ln\tilde{P}(0,r)}{T}.$$

因为 $\tilde{P}(0,r)$ 是包含 R 且 $e^{RT}\tilde{P}(0,r)$ 关于 R 单调递增,因此上述方程有唯一解,利用数值方法可求出名义收益率.

4 数值结果和分析

由于影响可展期企业债券名义收益率的因素有很多,如发行时的利率水平、到期日、可展期限、利率模型的参数、公司的违约概率和一旦违约时的回收率等. 以下分析单个因素对可展期债券的收益率的影响. 取参数 $a=1$,$b=0.01$,$\alpha=1$,$r_0=0.05$,$\varepsilon=0.4$,$\sigma_r=0.2$,$\theta=0.5$,$T=10$,$T_1=13$,在对某参数进行分析时,其他参数保持不变.

图 1 为可展期债券与不可展期债券的收益率差和名义到期日之间的关系,由于可展期债券的投资者需要承担更多的风险,如债券展期之后的利率风险以及展期内发行者违约的风险,因此在其他条件相同的情况下,可展期债券的收益率会高于普通的企业债券. 而收益率差随名义到期日递减则是因为投资者可能受到的展期后的风险被分摊到了展期之前的持续期.

图 2 和图 3 分别是在不同的回收率和初始利率水平下可展期期限对收益率的影响,图 4 为不同的初始利率水平下首次到期日对收益率的影响. 从图 2 中可以看出,回收率越高则该可展期债券的收益率越低; 图 3 和图 4 则显示初始利率越高,收益率也越高,因为投资者需要获得更高的回报.

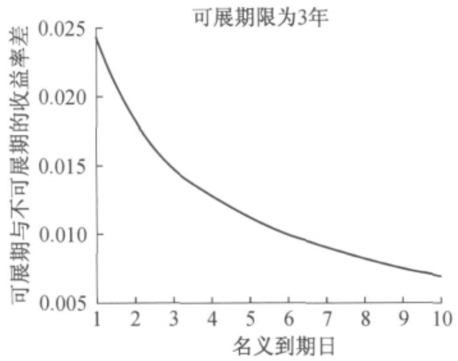

图 1 名义到期日与收益率差的关系

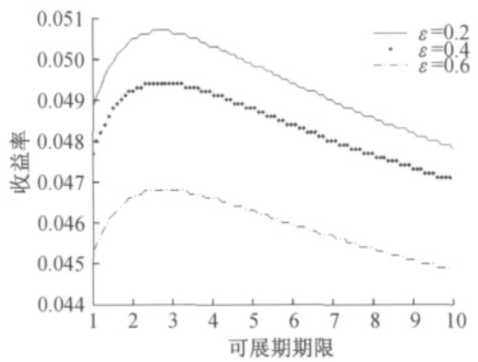

图 2 回收率和可展期期限对收益率影响

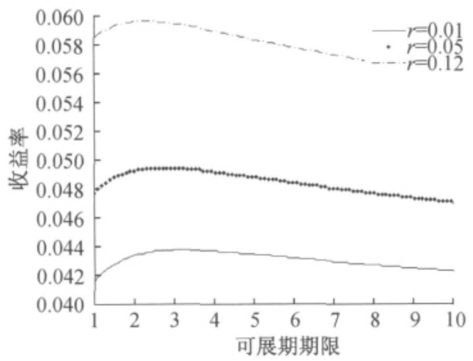

图 3 初始利率水平和可展期期限对收益率的影响

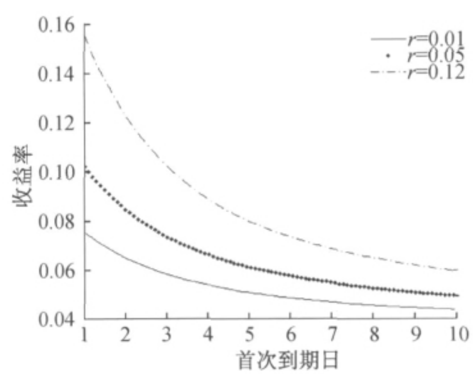

图 4 初始利率水平和首次到期日对收益率的影响

5 结　论

从以上的讨论可知，可展期企业债券实际是一张嵌入利率期权并有违约风险的合约，它比普通的企业债券拥有更高的收益率正是由于投资者承担了更多的风险. 与一般的企业债券不同，其到期的名义回报(不违约时的回报)并不只与期初的市场状态有关，还依赖于将来的利率水平，即在期初时其名义回报是不确定的. 补偿水平与利率未来的波动及公司违约可能的大小等因素有关.

参考文献:

[1] MERTON R. On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates [J]. Journal of Finance, 1974, 29(2): 449-470.

[2] BLACK F, COX J C. Valuing corporate securities: some effects of bond indenture provisions [J]. Journal of Finance, 1976, 31(2): 351-367.

[3] LONGSTAFF F, SCHWARTZ E. A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt [J]. Journal of Finance, 1995, 50(3): 789-819.

[4] ZHOU C. The term structure of credit spreads with jump risk [J]. Journal of Banking and Finance, 2001, 25(11): 2015-2040.

[5] JARROW R, TURNBULL S. Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk [J]. Journal of Finance, 1995, 50(1): 50-53.

[6] DUFFIE D, SINGLETON K J. Modeling term structures of defaultable bonds [J]. Review of Financial Studies, 1999, 12(4): 687-720.

[7] 任学敏，刘红梅. 用约化方法对可展期的企业债券定价 [J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2011, 39(7): 1088-1092.

[8] VASICEK O. An equilibrium characterization of the term structure [J]. The Journal of Financial Economics, 1977, 5(2): 177-188.

[9] KAC M. On distributions of certain wiener functional [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1949, 65(1): 1-13.

[10] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[11] 姜礼尚，孙和生，陈志浩，等. 偏微分方程选讲 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1997.

The pricing of firm bonds with extendable maturity by the reduced form approach

REN Xue-min, SHI Lin-song

(Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: We associate credit events with market rates to price firm bonds with extendable maturity. We deal with the credit risk by the reduced form approach and obtain the pricing formula for firm bonds with extendable maturity by the PDE approach under the assumption of stochastic interest rate and compare its return rate with that of ordinary firm bonds.

Key words: firm bond with extendable maturity; credit risk; reduced form

(责任编辑: 冯珍珍)