

黏弹性 Winkler 地基梁的振动特性分析

彭 丽, 陈春霞

(上海师范大学 建筑工程学院, 上海 201418)

摘 要: 运用复模态分析研究了有限长黏弹性 Winkler 地基梁的振动特性, 得出简支边界条件下的复频率方程和复模态函数表达式. 通过具体算例, 分析了黏弹性 Winkler 地基梁的固有频率和模态函数的特征, 以及梁的刚度系数和地基黏性系数对固有频率和模态函数的影响.

关键词: 黏弹性; 地基梁; 固有频率; 模态函数; 复模态分析法

中图分类号: O 32 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-5137(2012)06-0586-04

弹性基础梁做为很多工程元件的模型, 如公路、跑道、铁路、输油管道以及建筑中的沉桩等等, 其振动特性一直受到很多学者的关注. Winkler^[1] 首次提出 Winkler 基础模型, 即通过无限接近的连续的线性弹簧表示弹性基础的垂直变形. Kenney^[2] 研究了移动载荷作用下弹性 Winkler 地基梁的变形. West 和 Mafi^[3] 通过打靶法研究了梁两端施加轴向载荷的 Winkler 基础梁的振动频率. Chen^[4] 通过微分求积单元法分析了弹性 Winkler 基础上不同截面积梁的振动频率. Ge 和 Xu^[5] 给出了 Winkler 基础上弹性 Euler-Bernoulli 梁的频率和模态. 另外, 工程实际中的阻尼因素总是不可避免的, Sun^[6-7] 研究了不同载荷作用下黏弹性 Winkler 地基梁的封闭解问题, 得到阻尼系数对梁的变形影响很大.

已有的关于黏弹性 Winkler 基础梁的研究均是使用实模态法进行求解. 复模态分析方法已成功用于研究连续系统的振动问题^[8-10]. 但到目前为止, 尚没有见到关于使用复模态分析方法求解黏弹性 Winkler 地基梁的报道.

本文作者运用复模态分析方法研究简支边界条件下的黏弹性 Winkler 地基梁的固有频率和模态. 通过具体算例, 得到固有频率方程和模态函数表达式, 并分析了刚度系数和地基黏性系数等对梁的固有频率和模态函数的影响.

1 振动控制方程

有限长黏弹性 Winkler 地基梁的示意图如图 1 所示, 文献 [5] 给出的弹性 Winkler 地基梁的振动方程为:

$$\rho A w_{tt} + EI w_{xxxx} + k_1 w = 0. \quad (1)$$

考虑地基的黏性参数影响, 黏弹性 Winkler 地基梁的振动方程为

$$\rho A w_{tt} + EI w_{xxxx} + k_1 w + c w_t = 0, \quad (2)$$

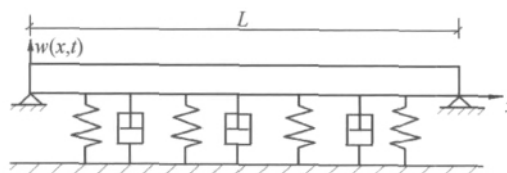


图 1 有限长黏弹性 Winkler 基础梁模型

收稿日期: 2012-10-29

基金项目: 上海师范大学青年教师基金(SK200875) .

作者简介: 彭 丽(1973-), 女, 上海师范大学建筑工程学院讲师, 上海大学上海市应用数学和力学研究所在读博士研究生.

其中 ρA 为单位长度梁的质量 EI 为梁的刚度 k_1 为弹性模量 c 为黏性系数.

无量纲化后的振动方程为

$$w_{tt} + k_f^2 w_{xxxx} + k_1 w + c w_t = 0. \quad (3)$$

2 复模态分析

对于式(3), 设

$$w(x, t) = \psi_n(x) e^{\lambda_n t}, \quad (4)$$

其中 $\lambda_n = -\delta_n + i\omega_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) δ_n 是衰减系数 ω_n 是振动频率. 将(4)式代入控制方程(3), 得到

$$\psi_n^{(4)}(x) + \frac{\lambda_n^2 + c\lambda_n + k_1}{k_f^2} \psi_n(x) = 0. \quad (5)$$

利用指数形式特解

$$\psi_n(x) = e^{\gamma_n x}, \quad (6)$$

代入方程(5)后, 导出本征方程

$$\gamma_n^4 + \frac{\lambda_n^2 + c\lambda_n + k_1}{k_f^2} = 0. \quad (7)$$

4 个本征值为

$$\gamma_{1n, 2n} = \pm \frac{(-k_1 - c\lambda_n - \lambda_n^2)^{1/4}}{\sqrt{k_f}}, \quad \gamma_{3n, 4n} = \pm i \frac{(-k_1 - c\lambda_n - \lambda_n^2)^{1/4}}{\sqrt{k_f}}, \quad (8)$$

方程(7)的通解可写作:

$$\psi_n(x) = C_{1n} e^{\gamma_{1n} x} + C_{2n} e^{\gamma_{2n} x} + C_{3n} e^{\gamma_{3n} x} + C_{4n} e^{\gamma_{4n} x}. \quad (9)$$

考虑梁的两端简支的边界条件:

$$w(0, t) = w(1, t) = 0, \quad w''(0, t) = w''(1, t) = 0. \quad (10)$$

代入(4)式后, 得

$$\psi_n(0) = \psi_n(1) = 0, \quad \psi_n''(0) = \psi_n''(1) = 0. \quad (11)$$

将(11)式代入(9)式后, 写出矩阵的形式得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \gamma_{1n}^2 & \gamma_{2n}^2 & \gamma_{3n}^2 & \gamma_{4n}^2 \\ e^{\gamma_{1n}} & e^{\gamma_{2n}} & e^{\gamma_{3n}} & e^{\gamma_{4n}} \\ \gamma_{1n}^2 e^{\gamma_{1n}} & \gamma_{2n}^2 e^{\gamma_{2n}} & \gamma_{3n}^2 e^{\gamma_{3n}} & \gamma_{4n}^2 e^{\gamma_{4n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{1n} \\ C_{2n} \\ C_{3n} \\ C_{4n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

为使原问题有非零解, 则系数矩阵的行列式为零, 化简后得到频率方程

$$\begin{aligned} & (e^{\gamma_{2n}} - e^{\gamma_{3n}})(e^{\gamma_{1n}} - e^{\gamma_{4n}})(\gamma_{2n}\gamma_{3n} + \gamma_{1n}\gamma_{4n}) + (e^{\gamma_{1n}} - e^{\gamma_{3n}})(e^{\gamma_{2n}} - e^{\gamma_{4n}}) \\ & (-\gamma_{1n}\gamma_{3n} - \gamma_{2n}\gamma_{4n}) + (e^{\gamma_{1n}} - e^{\gamma_{2n}})(e^{\gamma_{3n}} - e^{\gamma_{4n}})(\gamma_{1n}\gamma_{2n} + \gamma_{3n}\gamma_{4n}) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

将(8)式代入后, 方程(13)有数值解. 其数值解实部为衰减系数, 虚部为固有频率.

由方程(12)可得到用 C_{1n} 来表示的 C_{jn} ($j=2, 3, 4$), 代入(9)式后得到模态函数表达式

$$\begin{aligned} \psi_n(x) = C_{1n} \left\{ e^{\gamma_{1n} x} - \frac{(e^{\gamma_{3n}} - e^{\gamma_{4n}})\gamma_{1n} - (e^{\gamma_{1n}} - e^{\gamma_{4n}})\gamma_{3n} + (e^{\gamma_{1n}} - e^{\gamma_{3n}})\gamma_{4n}}{(e^{\gamma_{3n}} - e^{\gamma_{4n}})\gamma_{2n} - (e^{\gamma_{2n}} - e^{\gamma_{4n}})\gamma_{3n} + (e^{\gamma_{2n}} - e^{\gamma_{3n}})\gamma_{4n}} e^{\gamma_{2n} x} + \right. \\ \left. \frac{(e^{\gamma_{2n}} - e^{\gamma_{4n}})\gamma_{1n} - (e^{\gamma_{1n}} - e^{\gamma_{4n}})\gamma_{2n} + (e^{\gamma_{1n}} - e^{\gamma_{2n}})\gamma_{4n}}{(e^{\gamma_{3n}} - e^{\gamma_{4n}})\gamma_{2n} - (e^{\gamma_{2n}} - e^{\gamma_{4n}})\gamma_{3n} + (e^{\gamma_{2n}} - e^{\gamma_{3n}})\gamma_{4n}} e^{\gamma_{3n} x} - \right. \\ \left. \frac{(e^{\gamma_{2n}} - e^{\gamma_{3n}})\gamma_{1n} - (e^{\gamma_{1n}} - e^{\gamma_{3n}})\gamma_{2n} + (e^{\gamma_{1n}} - e^{\gamma_{2n}})\gamma_{3n}}{(e^{\gamma_{3n}} - e^{\gamma_{4n}})\gamma_{2n} - (e^{\gamma_{2n}} - e^{\gamma_{4n}})\gamma_{3n} + (e^{\gamma_{2n}} - e^{\gamma_{3n}})\gamma_{4n}} e^{\gamma_{4n} x} \right\}. \quad (14) \end{aligned}$$

3 具体算例

考虑阻尼的 Winkler 模型,由文献[11]中数值无量纲化后,取 $k_f = 0.0035$, $k_1 = 0.72$, $\rho = 0.10$, 通过数值方法得到无量纲化后的固有频率值,以及模态函数表达式.由表1可见,随着黏性系数由0增大到0.1, Winkler 地基梁由弹性变为黏弹性,各阶频率值略有降低.如图2所示,前九阶频率值非常接近,第十阶频率值增大较明显,第十和十一阶频率值又非常接近.在保持其他参数不变的情况下,通过改变梁的刚度系数,可发现随着刚度系数 k_f 的增大,模态函数幅值减小,见图3.由图4和图5可见,正则化后的模态函数实部和虚部图关于 x 轴对称.由于前四阶频率非常接近,图中前四阶模态函数幅值差别不大.

表1 前八阶固有频率

黏性系数	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8
$C = 0$	2.6498	2.6531	2.6677	2.7066	2.7867	2.9278	3.1310	3.5849
$C = 0.1$	2.6493	2.6526	2.6672	2.7061	2.7862	2.9273	3.1306	3.5846

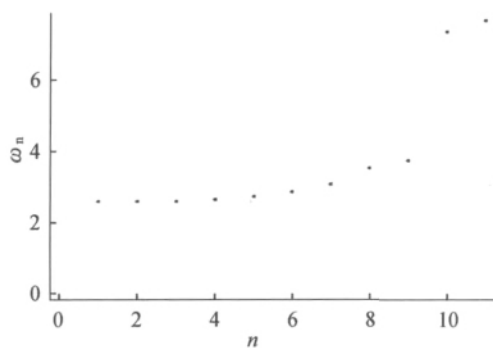


图2 前十一阶振动频率

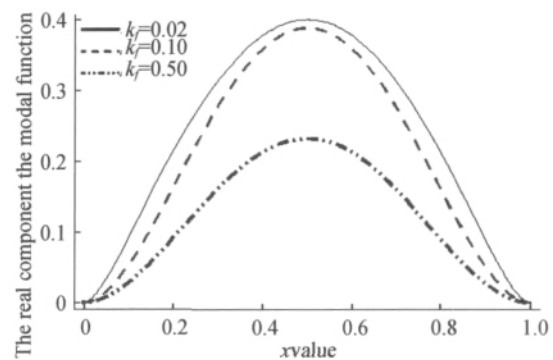


图3 一阶模态函数的实部

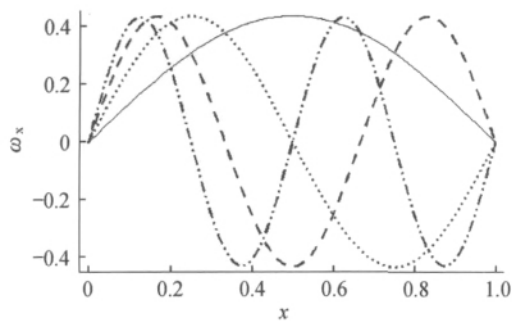


图4 前四阶模态函数的实部

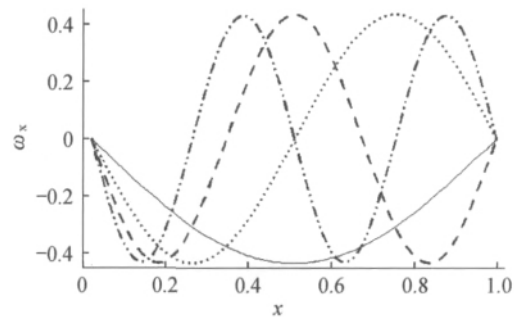


图5 前四阶模态函数的虚部

4 结论

应用复模态分析方法研究有限长黏弹性 Winkler 地基梁的振动特性,得到地基梁的复频率方程和复模态函数表达式.通过数值算例分析表明,两端简支的黏弹性 Winkler 地基梁的前九阶振动频率值较接近但第十阶后会有较大变化.地基梁的前四阶模态函数的幅值差别很小,且随着刚度系数和黏性系数的增大,模态函数幅值减小.从弹性地基梁变为黏弹性地基梁后,固有频率略有降低,但频率值相差不大,且两者分布规律相似.

参考文献:

- [1] WINKLER E. Theory of elasticity and strength [D]. Czechoslovakia: Dominicus Prague ,1867.
- [2] KENNEY J. Steady state vibrations of beam on elastic subgrade for moving loads [J]. ASME Journal of Applied Mechanics ,1954 21(4) : 359 – 64.
- [3] WEST H H ,MAFI M. Eigenvalues for beam-columns on elastic supports [J]. ASCE Journal of Structure Engineering , 1984 ,110(6) : 1305 – 1320.
- [4] CHEN C N. Vibration of prismatic beam on an elastic foundation by the differential quadrature element method [J]. Computers and Structures 2000 77:1 – 9.
- [5] GE H H ,XU J Y. A numerical method for cavity identification in beams on an elastic foundation [J]. Tsinghua Science and Technology 2007 ,12(5) : 540 – 545.
- [6] SUN L. A closed-form solution of beam on viscoelastic subgrade subjected to moving loads [J]. Computers and Structures , 2002 80: 1 – 8.
- [7] SUN L ,GREENBERG B S. Dynamic response of linear systems to moving stochastic sources [J]. Journal Sound and Vibration 2000 229(4) : 957 – 972.
- [8] 倪金福 张阿舟. 关于复模态理论的几个问题 [J]. 振动与冲击 ,1984 9(1) : 15 – 23.
- [9] 刘芳 陈立群. 黏弹性梁弯曲振动的复模态分析 [J]. 机械强度 2005 27(5) : 586 – 589.
- [10] 沈平川 王国祝. 单向偏心粘弹性梁弯扭耦合振动复模态分析 [J]. 力学季刊 2010 31(2) : 265 – 271.
- [11] HUANG W ,ZOU Y. The dynamic response of a viscoelastic Winkler foundation-supported elastic beam impacted by a low velocity [J]. Computers & Structures ,1994 52(3) : 431 – 436.

Analysis of vibrations of beams on viscoelastic winkler foundations

PENG Li , CHEN Chunxia

(College of Civil Engineering , Shanghai Normal University , Shanghai 201418 ,China)

Abstract: The complex modal analysis is applied to investigate vibrations of finite beams on viscoelastic Winkler foundations. The complex frequency equations and modal functions are obtained under simply supported boundary conditions. The characteristics of natural frequencies and mode functions of the viscoelastic Winkler foundation beams , as well as the impact of the beam stiffness coefficient and the foundation viscosity on natural frequencies and mode functions are analyzed through specific numerical examples.

Key words: viscoelastic; foundation beam; natural frequency; modal function; complex modal analysis

(责任编辑: 顾浩然)