第43卷第2期 上海师范大学学报(自然科学版) Vol.43,No.2
2014年4月 Journal of Shanghai Normal University(Natural Sciences) Apr.,2014
DOI:10.3969/J.1SSN.100-5137.2014.02.003

整体 EiBI-单极子

金兴华

(上海商学院 数学系,上海 200235)

摘　要: 研究 EiBI 引力理论下整体 EiBI-单极子问题.利用弯曲时空中引力的整体 EiBI-单极子的作用量,导出了整体 EiBI-单极子的方程,得到了时空度规和辅助度规间的关系.在参数很小的情况下给出了方程的渐近形式,进一步讨论了整体 EiBI-单极子在无穷远处的级数解.

关键词: Eddington-inspired Born-Infeld 理论; 单极子; 辅助度规

中图分类号: O 412.1　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1000-5137(2014)02-0127-05

0　引　言

早期宇宙的相变能产生各种拓扑缺陷,这些拓扑缺陷在宇宙学中有很重要的意义[1].整体单极子是最重要的缺陷之一.Barriola 和 Vilenkin[2] 首先研究了整体单极子的引力效应.当考虑引力时,整体单极子的线性发散质量有一个效果,这个效果类似于一个欠缺角.Harari 和 Loust`o[3],还有史和李[4] 已经表明,这个小引力势实际上是排斥的.在 FRW 时空中,拓扑缺陷也已被研究过了[5-7].在渐近 dS/AdS 时空[8-9] 和 Brans-Dicke 理论下[10] 的整体单极子的性质被发现和通常的单极子有很大的不同.如果将非正则动能相引入到整体单极子,金等[11] 发现引力场可能是吸引的,也可能是排斥的,这依赖于不同的非正则动能项.刘等[12] 已探讨过 Dirac-Born-Infeld 整体单极子的自引力问题.

历史上,为了解决库仑场和点粒子自能的发散问题,Born 和 Infeld[13] 将行列式形式引入作用量.1924 年,Eddington[14] 提出了一个不同与广义相对论的引力理论,行列式形式出现在了作用量中,他认为基本场应该是联络.对该作用量进行变分可以得到等效的爱因斯坦方程.但是该理论并不完备,因为它不包含物质部分.最近,Banados 和 Ferreira 基于 Eddington 的理论,提出了一个改进的引力理论,通常称为 Eddington-inspired Born-Infeld(简记 EiBI)引力[15].该理论的作用量可以包含物质部分,它弥补了 Eddington 引力理论中的问题.为了克服高阶导数和 ghost 带来的问题,EiBI 引力采用的是 Palatini 形式,即将度规和联络处理为独立的场.

EiBI 引力是非常吸引人的,因为在真空的情况下,它可以退化为广义相对论,并且可以避开大爆炸理论和恒星引力塌缩过程中的奇点问题.但是,EiBI 引力理论也存在问题.例如,在多方星的表面存在曲率奇点[16].类似的奇性也存在于恒星内部的相变过程[17].最近,有研究认为恒星表面的奇点问题可以被克服[18].

本文作者基于 EiBI 引力理论,导出整体 EiBI-单极子的方程,并给出参数 κ 很小时方程的渐近形式,进一步讨论了整体 EiBI-单极子在无穷远处的级数解.

收稿日期: 2014-03-17
基金项目: 上海市自然科学基金(12ZR1421700)
作者简介: 金兴华,男,副教授.
通信作者: 金兴华,E-mail:jinxh@sbs.edu.cn

1 EiBI 引力理论

整个讨论过程中,单位取 c = G = 1. EiBI 引力理论的作用量为:

$$S_{\mathrm{EiBI}} = \frac{1}{8\pi\kappa}\int \mathrm{d}^4x\left(\sqrt{|g_{\mu\nu}+\kappa R_{\mu\nu}|}-\gamma\sqrt{-g}\right)+S_M, \tag{1}$$

其中 $R_{\mu\nu}$ 为 Ricci 张量,由联络 $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 单独构成的,$|H_{\mu\nu}| = \det H_{\mu\nu}$,$\gamma = 1+\kappa\Lambda$,$\kappa$ 为与宇宙学常数 Λ 相反量纲的常数,S_M 为物质场的作用量. 当 $g \geqslant \kappa R$,作用量可以恢复到带宇宙学常数的 Einstein-Hilbert 作用量;当 $g \leqslant \kappa R$,作用量近似为 Eddington 的作用量. 该理论中,度规 $g_{\mu\nu}$ 和联络 $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 是独立的场. 因为本研究仅讨论渐近平坦解,所以这里固定 $\gamma = 1$. 分别对度规 $g_{\mu\nu}$ 和联络 $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 进行变分,可以得到方程

$$q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \kappa R_{\mu\nu}, \tag{2}$$

$$\sqrt{-q}\,q^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\,g^{\mu\nu} - 8\pi\kappa\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}, \tag{3}$$

其中 $q_{\mu\nu}$ 是一个辅助度规,它和联络是相容的,即 $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}q^{\alpha\sigma}(\partial_{\gamma}q_{\sigma\beta}+\partial_{\beta}q_{\sigma\gamma}-\partial_{\sigma}q_{\beta\gamma})$,$q \equiv |q_{\mu\nu}|$,$T_{\mu\nu}$ 为能动张量,定义为 $T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}}$,它满足与广义相对论中相同的守恒方程 $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$,这里的协变导数是关于度规 $g_{\mu\nu}$ 的. 可以发现,当物质作用量消失时,作用量(1)可以退化为 Einstein-Hilbert 作用量. 因此,EiBI 引力在真空中等同于广义相对论.

2 整体 EiBI - 单极子

弯曲时空中引力的整体 EiBI - 单极子的作用量为:

$$S = \frac{1}{8\pi\kappa}\int \mathrm{d}^4x\left(\sqrt{|g_{\mu\nu}+\kappa R_{\mu\nu}|}-\sqrt{-g}\right)+\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\phi^{a}\partial_{\nu}\phi^{a}-\frac{1}{4}\lambda^2(\phi^{a}\phi^{a}-\sigma_0^2)^2\right], \tag{4}$$

其中 σ_0 是一个以质量为单位的对称破缺标度. 描写整体 EiBI - 单极子的刺猬构形为:

$$\phi^{a} = \sigma_0 h(\rho)\frac{x^{a}}{\rho}, \tag{5}$$

其中 $x^{a}x^{a} = \rho^2$,$a = 1,2,3$,如果在空间无穷远处 $h \to 1$,将得到一个整体 EiBI - 单极子解.

在静态球对称时空中,时空度规 $g_{\mu\nu}$ 和辅助度规 $q_{\mu\nu}$ 采用如下形式:

$$g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu} = -B(\rho)\mathrm{d}t^2 + A(\rho)\mathrm{d}\rho^2 + f(\rho)\mathrm{d}\Omega^2, \tag{6}$$

$$q_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu} = -\mathrm{e}^{\beta(\rho)}\mathrm{d}t^2 + \mathrm{e}^{\alpha(\rho)}\mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\Omega^2, \tag{7}$$

其中 $\mathrm{d}\Omega^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2$. 引入无量纲参数 $r = \sigma_0\rho$,由方程(4)和(5),可以得到关于 h 的运动方程:

$$\frac{1}{A}h'' + \left[\frac{1}{A}\left(\frac{2}{r}-\frac{a'}{a}+\frac{b'_1}{b_1}\right)+\frac{1}{2B}\left(\frac{B}{A}\right)'\right]h' - \frac{2}{r^2}ab_1h - \lambda^2h(h^2-1) = 0, \tag{8}$$

其中,撇表示对 r 求导. 由方程(3),可以得到关系:

$$\mathrm{e}^{\beta} = B\frac{b_1b_2^2}{a},\ \mathrm{e}^{\alpha} = A\frac{ab_2^2}{b_1},\ f(r) = \frac{r^2}{ab_1}, \tag{9}$$

其中

$$a = \sqrt{-\frac{1+U+V-VW^2+\sqrt{W^2(1+2U+U^2+V^2(-1+W^2))}}{-1+W^2}},$$

$$b_1 = \sqrt{-\frac{1+U-V+VW^2+\sqrt{W^2(1+2U+U^2+V^2(-1+W^2))}}{-1+W^2}},$$

$$b_2 = \sqrt{1+V+U},$$

这里,$U=\frac{1}{4}\varepsilon^2\kappa\lambda^2(h^2-1)^2$, $V=\frac{1}{2}\varepsilon^2\kappa\frac{h'^2}{A}$, $W=\varepsilon^2\kappa\frac{h^2}{r^2}$,其中,$\varepsilon^2=8\pi\sigma_0^2$.

由方程(2)可以得到两个独立的方程:

$$\left(-\frac{1}{A}\frac{b_1}{ab_2^2}\right)\left[\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r}\left(\frac{A'}{A}+\frac{a'}{a}+2\frac{b'_2}{b_2}-\frac{b'_1}{b_1}\right)\right]+\frac{1}{r^2}=\frac{1}{2\kappa}\left(\frac{a}{b_1b_2^2}-\frac{b_1}{ab_2^2}+2-\frac{2}{ab_1}\right), \tag{10}$$

$$\left(-\frac{1}{A}\frac{b_1}{ab_2^2}\right)\left[\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r}\left(\frac{B'}{B}-\frac{a'}{a}+2\frac{b'_2}{b_2}+\frac{b'_1}{b_1}\right)\right]+\frac{1}{r^2}=\frac{1}{2\kappa}\left(-\frac{a}{b_1b_2^2}+\frac{b_1}{ab_2^2}+2-\frac{2}{ab_1}\right). \tag{11}$$

当$|\kappa|\ll1$,可以得到方程(8),(10)和(11)关于κ的渐近形式:

$$\frac{1}{A}h''+\left[\frac{1}{A}\left(\frac{2}{r}+\kappa Z_1\right)+\frac{1}{2B}\left(\frac{B}{A}\right)'\right]h'-\frac{2}{r^2}(1+\kappa Z_2)h-\lambda^2h(h^2-1)=0, \tag{12}$$

$$\left(-\frac{1}{A}(1+\kappa X_1)\right)\left[\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r}\left(\frac{A'}{A}+\kappa X_2\right)\right]+\frac{1}{r^2}=\varepsilon^2\left(\frac{h^2}{r^2}-\frac{h'^2}{2A}+\frac{1}{4}\lambda^2(h^2-1)^2\right)+\kappa X_3, \tag{13}$$

$$\left(-\frac{1}{A}(1+\kappa Y_1)\right)\left[\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r}\left(\frac{B'}{B}+\kappa Y_2\right)\right]+\frac{1}{r^2}=\varepsilon^2\left(\frac{h^2}{r^2}-\frac{h'^2}{2A}+\frac{1}{4}\lambda^2(h^2-1)^2\right)+\kappa Y_3, \tag{14}$$

其中

$$\begin{cases} X_1=\varepsilon^2\left(-\frac{1}{4}\lambda^2(h^2-1)^2-\frac{h'^2}{A}\right) \\ X_2=\varepsilon^2\left(\lambda^2h(h^2-1)h'-\frac{A'h'^2}{A^2}+\frac{2h'h''}{A}\right) \\ X_3=-\frac{1}{16r^2A^2}\varepsilon^4\left\{\lambda^2A^2(h^2-1)^2\left[r^2\lambda^2+(4-2r^2\lambda^2)h^2+r^2\lambda^2h^4\right]\right\} \\ \qquad -\frac{1}{16r^2A^2}\varepsilon^4\left\{4A\left[r^2\lambda^2+(2-2r^2\lambda^2)h^2+r^2\lambda^2h^4\right]h'^2+6r^2h'^4\right\} \end{cases},$$

$$\begin{cases} Y_1=\varepsilon^2\left(-\frac{1}{4}\lambda^2(h^2-1)^2-\frac{h'^2}{A}\right) \\ Y_2=\varepsilon^2\lambda^2h(h^2-1)h' \\ Y_3=\frac{1}{16r^2A^2}\varepsilon^4\left\{-\lambda^2A^2(h^2-1)^2\left[r^2\lambda^2+(4-2r^2\lambda^2)h^2+r^2\lambda^2h^4\right]\right\} \\ \qquad +\frac{1}{16r^2A^2}\varepsilon^4\left\{4A\left[r^2\lambda^2+(2-2r^2\lambda^2)h^2+r^2\lambda^2h^4\right]h'^2+2r^2h'^4\right\} \end{cases},$$

$$\begin{cases} Z_1=\varepsilon^2h'\frac{A'h'-2Ah''}{2A^2} \\ Z_2=\varepsilon^2\left(\frac{1}{4}\lambda^2(h^2-1)^2-\frac{h^2}{r^2}\right) \end{cases}.$$

容易发现,当$|\kappa|\to0$时,这些方程可以恢复到标准的整体单极子方程.

在$r\gg1$区域,可以展开$h(r)$,$A(r)$,$B(r)$,$f(r)$得

$$h(r) = 1 - \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \frac{-3 + 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon^2\sqrt{\kappa^2}\lambda^2}{2\lambda^4}\left(\frac{1}{r}\right)^4 + O(r^{-5}), \tag{15}$$

$$A(r) = \frac{1}{1-\varepsilon^2} - \frac{2M_\infty}{(1-\varepsilon^2)^2}\frac{1}{r} + \frac{\varepsilon^2(1-\varepsilon^2) + \lambda^2 M_\infty^2}{(1-\varepsilon^2)^3\lambda^2}\left(\frac{1}{r}\right)^2 + O(r^{-3}), \tag{16}$$

$$B(r) = (1-\varepsilon^2) - 2M_\infty\frac{1}{r} - \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2}\left(\frac{1}{r}\right)^2 + O(r^{-3}), \tag{17}$$

$$f(r) = r^2\left(1 - \frac{\varepsilon^2\sqrt{\kappa^2}}{r^2} + O(r^{-3})\right), \tag{18}$$

其中,常数 M_∞ 为整体 EiBI-单极子的质量. 从方程(15)可以发现,在 $r \gg 1$ 区域处,整体 EiBI-单极子的刺猬构形的 $h(r)$ 因子在 $\left(\frac{1}{r}\right)^4$ 项有不同于标准单极子的效应,而时空度规的不同效应主要体现在 $f(r)$ 项. 容易得到,在远离整体 EiBI-单极子的区域,有:

$$A(r)^{-1} = B(r) = 1 - \varepsilon^2 - \frac{2M_\infty}{r}. \tag{19}$$

由此,ε^2 描写时空的一个立体欠缺角.

为了显示立体欠缺角的效果,研究整体 EiBI-单极子周围测试粒子的运动. 为求解测地线方程,引入一个无量纲量 $u = GM_\infty/r$,于是可以得到 u 关于 ϕ 的二阶微分方程

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + (1-\varepsilon^2)u = \left(\frac{GM_\infty}{L}\right)^2 + 3u^2, \tag{20}$$

其中 L 是每单位质量的角动量. 当 $\left(\frac{GM_\infty}{L}\right)^2\phi\square 1$ 时,可以得到一个 u 的近似解

$$u \approx \left(\frac{GM_\infty}{L}\right)^2\left\{\frac{1}{1-\varepsilon^2} + e\cos\left[\left(1 - \frac{3}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)^3}}\left(\frac{GM_\infty}{L}\right)^2\right)\phi\right]\right\}, \tag{21}$$

其中 e 表示偏心率. 当一个测试粒子绕整体 EiBI-单极子转一圈时,它的进动是:

$$\Delta\phi \approx 6\pi\left(\frac{GM_\infty}{L}\right)^2 + 9\pi\left(\frac{GM_\infty}{L}\right)^2\varepsilon^2. \tag{22}$$

相比正常星的进动情况,方程(22)的最后一项是修正项.

参考文献:

[1] VILENKIN A,SHELLARD E P S. Cosmic Strings and Other Topological Defects [M]. Cambridge:Cambridge Unversity Press,1994.

[2] BARRIOLA M,VILENKIN A. Gravitational field of a global monopole [J]. Phys Rev Lett,1989,63:341-348.

[3] HARARI D,LOUSTO C. Repulsive gravitational effects of global monopoles [J]. Phys Rev D,1990,42:2626-2631.

[4] SHI X,LI X Z. The gravitational field of a global monopole [J]. Class Quantum Grav,1991,8:761-767.

[5] BASU R,GUTH A H,VILENKIN A. Quantum creation of topological defects during inflation [J]. Phys Rev D,1991,44:340-351.

[6] BASU R,VILENKIN A. Evolution of topological defects during inflation [J]. Phys Rev D,1994,50:7150-7153.

[7] CHEN C,CHENG H,LI X Z,ZHAI X H. Non-existence of topological defects during inflation beyond the critical value [J]. Class Quantum Grav,1996,13:701 - 704.

[8] LI X Z,HAO J G. Global monopole in asymptotically dS/AdS space-time [J]. Phys Rev D,2002,66:107701.

[9] HAO J G,LI X Z. Features of motion around global monopole in asymptotically dS/AdS space-time [J]. Class Quantum Grav,2003,20:1703 - 1714.

[10] LI X Z,LU J Z. Global monopoles in the Brans-Dicke theory [J]. Phys Rev D,2000,62:107501.

[11] JIN X H,LI X Z,LIU D J. Gravitating global k-monopole [J]. Class Quantum Grav,2007,24:2773 - 2780.

[12] LIU D J,ZHANG Y L,LI X Z. A Self-gravitating Dirac-Born-Infeld Global Monopole [J]. Eur Phys J C,2009,60:495 - 500.

[13] BORN M,INFELD L. Foundations of the New Field Theory [J]. Proc R Soc London A,1934,144:425 - 451.

[14] EDDINGTON A S. The Mathematical Theory of Relativity [M]. Cambridge:Cambridge Unversity Press,1924.

[15] BANADOS M,FERREIRA P G. Eddington's theory of gravity and its progeny [J]. Phys Rev Lett,2010,105:011101.

[16] PANI P,SOTIRIOU T P. Surface singularities in Eddington-inspired Born-Infeld gravity [J]. Phys Rev Lett,2012,109:251102.

[17] SHAM Y H,LEUNG P T,LIN L M. Compact stars in Eddington-inspired Born-Infeld gravity:Anomalies associated with phase transitions [J]. Phys Rev D,2013,87:061503.

[18] KIM H C. Physics at the surface of a star in Eddington-inspired Born-Infeld gravity [J]. Phys Rev D,2014,89:064001.

Global EiBI-monopole

JIN Xinghua

(Department of Mathematics,Shanghai Business School,Shanghai 200235,China)

Abstract: A global EiBI-monopole problem is studied under EiBI gravitational theory. The equations of global EiBI-monopole are derived in the curved spacetime and the relation between the spacetime metric and auxiliary metric is found. In the case of a very small parameter,an asymptotic form of equations is given. The series solutions of global EiBI-monopole at infinity are found.

Key words: Eddington-inspired Born-Infeld theory; monopole; auxiliary metric

(责任编辑:顾浩然)