

# 正则静态黑洞的薄吸积盘

仇天奇

(上海师范大学天体物理中心,上海 200234)

**摘要:** 依照 Penrose 的宇宙检察猜想,自然界不存在裸奇性. 所以,值得进一步考虑的是自然界根本不存在奇性. 讨论了没有奇点的正则黑洞,并研究史瓦西黑洞和正则黑洞在天体物理学中的区别. 研究围绕正则黑洞的薄吸积盘,比较了不同正则黑洞之间薄吸积盘的能量通量,辐射温度和吸积效率. 结果显示,正则黑洞薄吸积盘内的相互作用比史瓦西的更加强. 此外,随着正则黑洞质量不断地减少,薄吸积盘会更有效地消耗能量. 这些特征提供了一种区分出正则黑洞的可能性.

**关键词:** 时空奇点; 正则黑洞; 薄吸积盘

**中图分类号:** P 145.8 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-5137(2014)04-0427-05

## 0 引言

时空奇点被认为是广义相对论中最有趣也是最令人困惑的结论之一. 奇点处是一个时空无限弯曲、经典物理理论行将失效的地方. 因此,时空奇点成了广义相对论理论适用范围的一个限制. 人们普遍认为,时空奇点的困难只能从量子引力中才能找到解决的方案. 然而,迄今尚未有一个成熟的量子引力理论来解决时空奇点这一困难. 因此,一类被称为正则黑洞的黑洞模型得到了广泛的关注. 正则黑洞被认为能够在弱能情况下避免时空奇点的存在. 相比于经典黑洞,它同样包含有事件视界,但它的中心不再是时空无限弯曲之处,取而代之的是一个时空曲率有限的点. 并且,正则黑洞的度规也有别于爱因斯坦真空解. 它的度规可从对爱因斯坦引力的修改或非线性磁单极的引力场中得到<sup>[1]</sup>.

在1968年,Bardeen首次提出了满足上述情况的正则黑洞<sup>[2]</sup>,在下文中称之为解B. 该正则黑洞具有球对称的、静态的、渐进平坦的度规. 在 $r \rightarrow 0$ 的极限情况下,解将趋于 de Sitter 解,而在 $r \rightarrow \infty$ 的极限下,将趋于 Reissner-Nordström 解. 虽然正则黑洞 B 解并非来自于经典爱因斯坦方程,但后来被证明是能够从耦合了非线性磁单极的引力场中得到<sup>[3]</sup>. 正则黑洞 B 对后来正则黑洞的研究产生了深远的影响,一些相类似的正则黑洞解也相继被提出. 2005年,何向楠提出了一个新的正则黑洞解,在下文中称之为解A. 两类解具有相似的性质,但解A是目前正则黑洞中最简单也是最小的正则黑洞模型<sup>[2]</sup>.

一直以来,正则黑洞有别于经典黑洞的特性,在理论上没有更深入地进行探究. 本文作者通过将正则黑洞纳入天文学观测的领域,希望对正则黑洞相关特性的研究起到一定的帮助. 此方法也见于中子星和夸克星的薄吸积盘研究<sup>[4]</sup>以及 Kerr 黑洞的吸积盘研究<sup>[5]</sup>. 探讨了围绕于正则黑洞的薄吸积盘. 薄吸积盘作为一种简单的吸积盘理论,它围绕在紧致星体的周围,形成一片类似土星光环形状的薄盘. 盘中的主要成份为吸积得来的物质颗粒和气体. 通过观察其中物质的运动,能够得到一些重要的天文学信息,并可能从中得到有关正则黑洞性质的线索.

收稿日期: 2014-06-21

基金项目: 上海市自然科学基金项目(12ZR142170)

通信作者: 仇天奇,中国上海市桂林路100号上海师范大学天体物理中心,邮编:200234, E-mail: 1000342129@smail.shnu.edu.cn

薄吸积盘理论始于1972年 Pringle 和 Rees ,以及1973年 Shakura 和 Sunyaev 的工作. 发展至今,已形成了一套较完整的薄吸积盘稳态理论. 盘的最内层具有一个稳定的运动轨道,处于此轨道上的物质以高速的运动来免于被黑洞吸收. 在其他的轨道中,吸积等离子体将做开普勒运动<sup>[6]</sup>. 研究以下正则黑洞薄吸积盘的物理参量. 其一是能量通量,考虑吸积盘以黑体辐射的方式传播能量,那么能量通量可以从盘表面处观测. 其二是吸积效率,即在吸积过程中,黑洞将剩余质量转化成辐射的效率. 最后,考虑吸积盘温度变化<sup>[7]</sup>. 对上述物理参量的讨论以及与 Schwarzschild 黑洞之间的比较,将在结论部分进行探讨.

## 1 薄吸积盘简述

考虑任意一中静态、轴对称度规,

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + g_{t\phi} dt d\phi + g_{rr} dr^2 + g_{\phi\phi} d\phi^2. \quad (1)$$

选取薄吸积盘的赤道面为研究对象  $\theta = \pi/2$ . 薄吸积盘中的物质具有能量  $E$ , 角动量  $L$ .

$$E = -\xi_{(t)\mu} p^\mu = -g_{tt} \frac{dt}{d\lambda} - g_{t\phi} \frac{d\phi}{d\lambda},$$

$$L = \xi_{(\phi)\mu} p^\mu = g_{t\phi} \frac{dt}{d\lambda} + g_{\phi\phi} \frac{d\phi}{d\lambda}. \quad (2)$$

其中  $p^\mu = \dot{x}^\mu = dx^\mu/d\lambda$ . 进行无量纲处理,令  $\tau = m\lambda$ , 并带入能量  $E$  和角动量  $L$ . 能够得到无量纲后的能量  $E = E/m$ , 角动量  $L = L/m$ , 以及角速度  $\Omega$ .

$$L = \frac{g_{t\phi} + g_{\phi\phi}\Omega}{\sqrt{-g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega - g_{\phi\phi}\Omega^2}}, \quad (3)$$

$$E = -\frac{g_{tt} + g_{t\phi}\Omega}{\sqrt{-g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega - g_{\phi\phi}\Omega^2}}, \quad (4)$$

$$\Omega = \frac{-g_{t\phi r} + \sqrt{g_{t\phi r}^2 - g_{tt} g_{\phi\phi r}}}{g_{\phi\phi r}}. \quad (5)$$

薄吸积盘的势能项定义为:

$$V(r) = \frac{E^2 g_{\phi\phi} + 2ELg_{t\phi} + L^2 g_{tt}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt} g_{\phi\phi}}. \quad (6)$$

为了能够在薄吸积盘赤道面得到最内层稳定圆形轨道,及轨道半径  $r = r_{ms}$ , 要求势能项具有  $V(r) = 0$  以及  $V_r(r) = 0$ . 当考虑  $V_{rr}(r)|_{r=r_{ms}} = 0$  的情况,能够得到最内层稳定圆形轨道半径  $r = r_{ms}$ <sup>[4]</sup>.

$$[E^2 g_{\phi\phi rr} + 2ELg_{t\phi rr} + L^2 g_{tt rr} - (g_{t\phi}^2 - g_{tt} g_{\phi\phi})_{rr}]_{r=r_{ms}} = 0. \quad (7)$$

通过计算薄吸积盘的能量  $E$ , 角动量  $L$  以及角速度  $\Omega$ , 不仅可以求得稳定轨道半径  $r = r_{ms}$ , 同时能量通量  $F(r)$  亦可通过下式得到<sup>[8]</sup>.

$$F(r) = -\frac{\dot{M}_0}{4\pi} \frac{\Omega_r}{\sqrt{-g} (E - \Omega L)^2} \int_{r_{ms}}^r (E - \Omega L) L_r dr. \quad (8)$$

通过热力学平衡,薄吸积盘中物质的运动得以维持. 考虑从盘表面发射出的辐射为黑体辐射,则相应的吸积盘温度可以表示为  $T(r) = \left(\frac{F(r)}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}}$ , 其中  $\sigma$  为 Boltzmann 常数. 描述吸积盘性质的另一个物理参数为吸积效率. 定义为: 光子从吸积盘表面向无穷远处辐射的能量与黑洞从吸积盘吸入的能量之比. 若所有光子都可以向无穷远处辐射,那么吸积效率只与最内层稳定轨道中的物质能量相关<sup>[4]</sup>.

$$\epsilon = 1 - E|_{r=r_{ms}}. \quad (9)$$

## 2 正则静态黑洞的薄吸积盘

考虑如下球对称度规,

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + dr^2/f(r) + r^2 d\Omega^2. \tag{10}$$

两类正则黑洞解 A 和解 B 分别为:

$$\text{解 A } f(r) = 1 - \frac{2m(r)}{r}, \quad m(r) = M \frac{r^3}{r^3 + n}; \tag{11}$$

$$\text{解 B } f(r) = 1 - \frac{2m(r)}{r}, \quad m(r) = M \left( \frac{r^2}{r^2 + g^2} \right)^{\frac{3}{2}}. \tag{12}$$

其中  $M$  是黑洞的质量  $n$  是一个正的实数  $g$  是由非线性电动力学所描述的自引力磁单极荷. 通过计算得到相应吸积盘的角速度 能量以及角动量.

$$\Omega = \begin{cases} \frac{\sqrt{r^3 - 2n}}{r^3 + n} & \text{解 A} \\ \frac{\sqrt{r^2 - 2g^2}}{\sqrt{(r^2 + g^2)^{5/2}}} & \text{解 B} \end{cases}, \quad E = \begin{cases} \frac{(r-2)r^2 + n}{\sqrt{r^5(r-3) + 2nr^3 + n^2}} & \text{解 A} \\ \frac{[(r^2 + g^2)^{3/2} - 2r^2]^2}{\sqrt{(r^2 + g^2)^3 - 3r^2(r^2 + g^2)^{1/2}}} & \text{解 B} \end{cases},$$

$$L = \begin{cases} \frac{\sqrt{r^4(r^3 - 2n)}}{\sqrt{r^5(r-3) + 2nr^3 + n^2}} & \text{解 A} \\ \frac{\sqrt{r^4(r^2 - 2g^2)}}{\sqrt{(r^2 + g^2)^{5/2} - 3r^4}} & \text{解 B} \end{cases}. \tag{13}$$

对于解 A ,当  $n=0$  时 ,正则黑洞将退化为 Schwarzschild 黑洞. 可以看出 ,度规在  $r \rightarrow \infty$  时 ,时空是渐进平坦的. 在  $r \rightarrow 0$  ,并不会像经典黑洞一样显示出奇异性 ,而是趋于一个有限值 ,从而避免了时空奇点.

从 (7) 式可知  $8n^2r^2 - 11nr^5 - (r-6)r^7 = 0$  ,对于不同的  $n$  ,得到不同的最内层稳定轨道半径  $r_{isco}$ . 从图 1 中看出  $r_{isco}$  与  $n$  之间呈线性关系 ,在  $n=0$  处 ,为 Schwarzschild 黑洞的最内层稳定轨道半径 ,也是此正则黑洞最内层稳定轨道半径最大的情况. 为了让正则黑洞 A 的事件视界存在 ,要求  $n \leq 32/27$  ,此时的黑洞事件视界半径约为  $4r_s/3$  ,其中  $r_s$  是 Schwarzschild 半径.

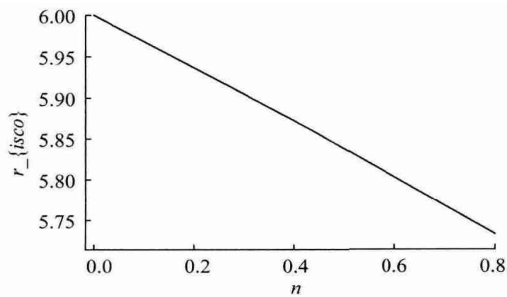


图 1 正则黑洞 A 薄吸积盘的最内层稳定轨道半径  $r_{isco}$  随  $n$  的变化

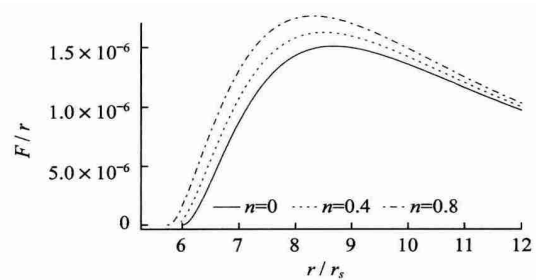


图 2 选取  $n=0, n=0.4, n=0.8$  时 ,正则黑洞 A 薄吸积盘能量通量  $F(r)$  随  $r/r_s$  的变化

进一步计算不同  $n$  值的吸积盘能量通量  $F(r)$  (图 2) ,以及吸积盘温度  $T(r)$  (图 3) . 发现两者的数值都比  $n=0$  的 Schwarzschild 黑洞情况要高. 从计算出的吸积效率  $n=0$  为  $\epsilon = 5.7191\%$  、 $n=0.4$  为  $\epsilon = 5.90673\%$  、 $n=0.8$  为  $\epsilon = 5.91338\%$  ,也可看出吸积效率随  $n$  值的增加而变大. 表明正则黑洞 A 的薄吸积盘较之于 Schwarzschild 情况更强(图 4) .

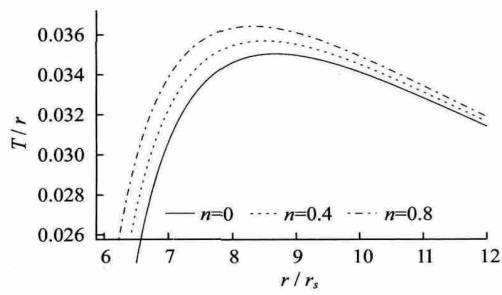


图3 正则黑洞 A 的吸积盘温度  $T(r)$  随  $r/r_s$  的变化

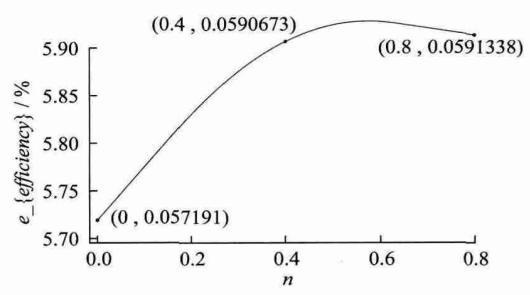


图4 在正则黑洞 A 吸积盘中, 吸积效率  $\epsilon$  随  $n$  值的变化

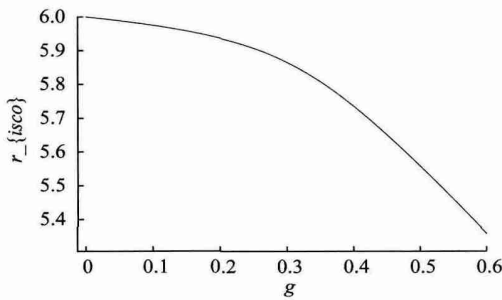


图5 正则黑洞 B 薄吸积盘最内层稳定轨道半径  $r_{isco}$  随  $g$  的变化情况

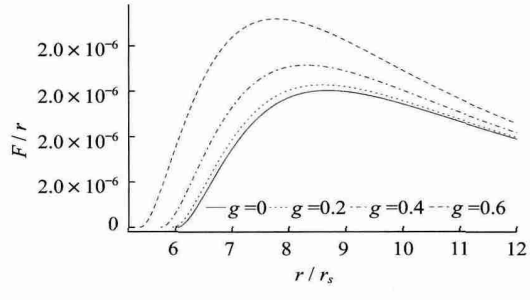


图6 不同  $g$  值情况下, 正则黑洞 B 薄吸积盘的能量通量  $F(r)$  随  $r/r_s$  的变化

在正则黑洞 B 情况. 首先, 从 (7) 式可求出吸积盘最内层稳定轨道半径  $r_{isco}$  为:

$$12r^8(r^2 + g^2)^{13/2} + 30r^6(r^2 + g^2)^8 + 16r^2(r^2 + g^2)^{10} + 3.33 \times 10^{-16}(r^2 + g^2)^{23/2} + r^4(8.88 \times 10^{-16}(r^2 + g^2)^{17/2} - 48(r^2 + g^2)^9) = 0. \quad (14)$$

$r_{isco}$  与  $g$  成抛物线型变化(图 5) 随着  $g$  值的增加 相比于正则黑洞 A 正则黑洞 B 最内层稳定轨道的半径迅速地减小. 在  $g = 0$  处, 其最大值仍同于 Schwarzschild 黑洞情况. 为使正则黑洞 B 存在事件视界, 要求  $g \leq \sqrt{16/27}$ .

本文作者发现 正则黑洞 B 下薄吸积盘能量通量的变化与 Schwarzschild 黑洞相类似. 所不同的是正则黑洞 B 下的通量要高出 Schwarzschild 的情况(图 6). 相应的吸积盘温度也更高(图 7). 进一步计算吸收效率 在  $n = 0$   $\epsilon = 5.7191\%$ 、 $n = 0.2$   $\epsilon = 5.7725\%$ 、 $n = 0.4$   $\epsilon = 5.94625\%$ 、 $n = 0.6$   $\epsilon = 6.29598\%$ . 随着  $g$  值的增加, 吸积效率不断地增加, 表明正则黑洞 B 薄吸积盘内 物质之间的相互作用不断地增强, 运动更加剧烈, 使得能量通量以及温度升高. 从而为区分出正则黑洞 B 提供帮助.

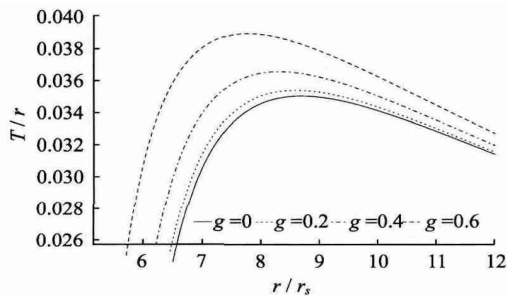


图7 不同  $g$  值下, 正则黑洞 B 薄吸积盘温度  $T(r)$  随  $r/r_s$  的变化

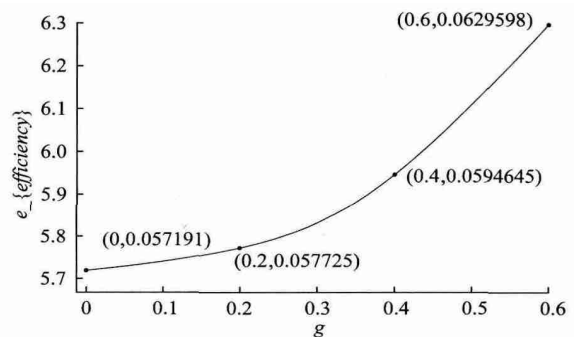


图8 正则黑洞 B 薄吸积盘吸收效率  $\epsilon$  随  $g$  变化的情况

### 3 结 论

本文作者讨论了两种简单正则黑洞的薄吸积盘,其吸积盘的能量通量、温度以及吸积效率,都比 Schwarzschild 黑洞的情况高.两种正则黑洞的薄吸积盘运动都表现得更加活跃,盘内物质间的相互作用也更加剧烈. Schwarzschild 黑洞解是爱因斯坦方程的精确解.从所探讨正则黑洞薄吸积盘的天文学信息看,本研究所考虑的正则黑洞并不同于 Schwarzschild 黑洞,这也意味着其解不太可能来源于经典爱因斯坦方程.文献中已指出,正则黑洞 B 的场源与非线性电动力学相关联<sup>[3]</sup>.有朝一日,若正则黑洞能够被观测到,那么很有可能暗示着经典的爱因斯坦方程需要被修改或者纳入一些未曾考虑的相互作用.

### 参考文献:

- [1] AYÓN-BEATO E ,GARCÍA A. Regular Black Hole in General Relativity Coupled to Nonlinear Electrodynamics [J]. Physical Review Letters ,1998 ,80( 23) : 5056 – 5059.
- [2] HAYWARD S. Formation and Evaporation of Nonsingular Black Holes [J]. Physical Review Letters 9 ,2006 ,96:031103 – 14.
- [3] AYÓN-BEATO E ,GARCÍA A. The Bardeen Model as a Nonlinear Magnetic Monopole [J]. Physics Letters B ,2000 ,493( 1 – 2) : 149 – 152.
- [4] KOVÁCS Z ,CHENG K S ,HARKO T. Thin Accretion Discs Around Neutron and Quark Stars [J]. Astronomy and Astrophysics ,2009 ,500( 2) : 621 – 631.
- [5] ABRAMOWICZ M A ,LANZA A ,PERCIVAL M J. Accretion Discs Around Kerr Black Holes: Vertical Equilibrium Revisited [J]. The Astrophysical Journal ,1997 ,479( 1) : 179 – 183.
- [6] PAGE D N ,THORNE K S. Disk-accretion onto a Black Hole. Time-averaged Structure of Accretion Disk [J]. The Astrophysical Journal ,1974 ,191: 499 – 506.
- [7] TORRES D F. Accretion Disc Onto a Static Non-baryonic Compact Object [J]. Nuclear Physics B ,2002 ,626( 1 – 2) : 377 – 394.
- [8] SHAKURA N ,SUNYAEV R. Black Holes in Binary Systems. Observational Appearance [J]. Astronomy and Astrophysics , 1973 ,24: 337 – 355.

## Thin accretion disk around regular black hole

QIU Tianqi

( Shanghai United Center for Astrophysics( SUCA) ,Shanghai Normal University ,Shanghai 200234 ,China)

**Abstract:** The Penrose's cosmic censorship conjecture says that naked singularities do not exist in nature. So it seems reasonable to further conjecture that not even a singularity exists in nature. In this paper a regular black hole without singularity is studied in detail especially on its thin accretion disk energy flux radiation temperature and accretion efficiency. It is found that the interaction of regular black hole is stronger than that of the Schwarzschild black hole. Furthermore the thin accretion will be more efficiency to lost energy while the mass of black hole decreased. These particular properties may be used to distinguish between black holes.

**Key words:** singularity; regular black hole; thin accretion disk

( 责任编辑: 顾浩然)